NORGES VASSDRAGS-OG ELEKTRISITETSVESEN

ISVEIER OG ISENS BÆREEVNE

KORT REFERAT FRA RUSSISK LITTERATUR

UTARBEIDET VED ISKONTORET

RAPPORT NR. 1/68

VASSDRAGSDIREKTORATET

HYDROLOGISK AVDELING

OSLO JAN. 1968

NORGES
VASSDRAGS- OG ENERGIDIREKTORAT
BIBLIOTEKET

Innhold Side

Innledning 1

A. Statisk og dynamisk belastning av et isdekke og bestemmende faktorer for isens bæreevne 2

1. Undersøkelse av et isdekkes deformasjoner ved statisk belastning 2
2. Undersøkelser av isens påkjenning ved et overfartssted, dynamisk belastning 4
3. Undersøkelse av deformasjonen av et isdekke ved statisk og dynamisk belastning 8

B. Metoder til beregning av isdekkets bæreevne 16

1. Forenklete beregningsmetoder bygget på analogiprinsippet 16
2. Beregningsmetoder bygget på elastisitetsteorien 17
3. Beregning av isens bæreevne 23
   a. Istykkelse 24
   b. Isens temperatur 24
   c. De tillatte spenninger 25
   d. Det fundamentelle grunnlag for beregningen 26
   e. Praktiske beregningsoppgaver 28
   f. Forbindelsen mellom istykkelse og største tillatte belastning 29
   g. Eksempler på isens bæreevne 30

C. Hovedtyper av isveier og mulige forsterkninger av disse 34

1. Isveier under naturlige forhold 34
2. Isveier med overbygg 35

Vedlegg: Nomogrammer til praktisk bruk for beregning av isens tilvekst og temperatur.

Innledning.

Transport over is vil alltid være forbundet med en viss risiko. Så lenge transporten foregikk med hest og slede var problemet forholdsvis enkelt, men etter hvert som hesten er blitt erstattet av bil og traktor er belastningen på isen blitt meget større, hvorved risikomomentet er økt i betydelig grad.

Kommunikasjonsmessig har islagte sjøer og elver vært og er fremdeles til stor nytte i Russland. F.eks. kan nevnes at i 1904 ble en midlertidig jernbaneforbindelse på 45 km opprettet mellom øst og vestsiden av Baikalsjøen.

Under siste krig mens Leningrad var omringet, foregikk den vesentlige trafikk til og fra byen om vinteren på en ca. 80 km lang isvei over den sydlige del av Ladoga. Veien ble kalt "Livets vei".

Enkelte steder ved Østersjøen og Bottenviken benyttes fremdeles lange isveier.

I de siste 10 år er det foretatt inngående undersøkelser i flere land både eksperimentelt og teoretisk av isens fysikalske egenskaper og dens bæreevne. Også i vårt land er fremdeles isen av stor nytte for vintertrafikk og derfor kan de erfaringer som er høstet i Russland om isens bæreevne også være til nytte for oss. I det følgende er gitt et utdrag av professor I. S. Peschanskij's bok Iskunnskap og Isteknikk kap. V om dette emne.

Som vedlegg er gitt nomogrammer til praktisk bruk for beregning av isens tilvekst og -temperatur for Arktiske områder utarbeidet ved Statens Hydrometeorologisk Instititutt.

Edvigs V. Kanavin.

A. Statisk og dynamisk belastning av et isdekke og bestemmende faktorer for isens bæreevne.

En isflate kan bli påvirket av to forskjellige belastninger, nemlig statisk og dynamisk eller en kombinasjon av disse.

1. Undersøkelse av et isdekkes deformasjoner ved statisk belastning.

Isen vil likesom andre faste stoffer under påvirkning av ytre kreftes gjennomgå følgende stadier: elastisitetsstadiet, plastisitetsstadiet og bruddstadiet.

For å undersøke disse stadier ble det for små istykkelser (1 - 10 cm) brukt følgende metode. I et isdekke ble det skåret en rund råk med diameter 3-8 m. På den nye tynne isen som ble dannet på råken, ble det plassert vekter av forskjellige størrelser og bøyninger ble målt med selvregistrerende apparatur i forskjellige avstander fra belastningen. Ved større istykkelser ble det brukt andre metoder.

I tabellen nedenfor er gitt resultatene av målingene på et svært tynt isdekke som var utsatt for meget kortvarige belastninger.

Belastning	Avstand (cm) fra belastningen			
	15	45	105	135
Uten belastning	0	0	0	0
Belastning 200 g	0,7	0,4	0,1	0
Belastningen tatt bort	0,3	0	0	0
Belastning 200 g	0,7	0,3	0	0
Belastning 1200 g	2,7	1,0	0,2	0

Den tynne isen viste tydelig elastiske egenskaper for små belastninger, men det blir tilbake en varig plastisk deformasjon etter at belastningen er fjernet. Deformasjonen forekom bare i et lite område omkring belastningen. Det viser seg at deformasjonsområdet er uavhengig av belastningens størrelse, men er avhengig av isens tykkelse som følgende tabell viser

Sammenheng mellom deformasjonsområdets radius og isens tykkelse h.

h cm	radius i m	h cm	radius i m
1	2,0 - 2,5	5	6,5 - 7,5
2	4,0 - 5,0	10	10,0 -11,0

Isens plastiske deformasjon (bøyning) øker jevnt inntil brudd inntreffer. Mellom deformasjonens størrelse og tiden er det en tilnærmet lineær sammenheng som er avhengig av flere faktorer: isens tykkelse og strukter, belastningens størrelse, isens temperatur o.a.

Undersøkelsene viste at deformasjonsområdets radius er adskillig større for den elastiske deformasjon enn for den plastiske. F. eks. ved istykkelse 4 cm var radien for elastisitetens virkning 25 m, men for plastisitetens bare 5 m.

Når en belastning virker i lang nok tid vil den plastiske deformasjon nå bruddgrensen. Eksperimenter viste at ved forskjellige belastninger inntraff brudd ved samme bøyning. Belastningens størrelse innvirket bare på den tid som gikk inntil brudd inntraff. Bøyningens størrelse ved brudd var avhengig av isens tykkelse som følgende tabell viser.

Ved istykkelse		1 cm	intraff	brudd	ved		3,0 cm	bøyning	
"	"	5 "	"	"	"		5,0 "	"	
"	"	40 "	"	"	"		14,0 "	"	

Når en isflate bøyes under påvirkning av en last, vil det i vannet oppstå elastiske spenninger som sammen med isens elastiske egenskaper helt eller delvis kan nøytralisere belastningen. Hvis belastningen er så stor at isens elastisitetsområde overskrides, er det bare isens plastiske egenskaper som er bestemmende om brudd inntreffer eller ikke. Den praktiske interesse ved undersøkelsene ligger derfor innenfor isens plastisitetsområde og særlig i grenseområde for brudd.

Tabellen nedenfor gir resultatene av en undersøkelse av sammenhengen mellom isens tykkelse h og den belastning P som gå brudd.

h cm	P kg	h cm	P kg	h cm	P kg
0,15	0,5	1,60	57,2	3,60	220,0
0,20	0,9	2,00	92,0	4,00	345,0
0,45	5,0	2,50	147,0	7,00	707,0
1,20	32,0	3,00	157,0	10,5	2416,0
1,36	37,0	3,30	162,0	40,0	30000,0

Isens kvalitet er ikke angitt; men antas at det har vært ren nydannet stålis.

På grunnlag av rekke målinger som er foretatt på samme måte som i foregående tabell, har en stilt opp formelen

$$P = a\,h^2$$

hvor P er bruddlasten, h isens tykkelse og a en koeffisient som avhenger av isens kvalitet. (a er ca. 20 for stålis).

På fig. 1 øverst er resultatene av en del målinger av bøyninger i forskjellige avstander fra belastningen og for forskjellige belastningstider framstilt grafisk. Nederst på fig. 1 viser diagram a forløpet av bøyningen med hensyn til tiden for to forskjellige belastninger P_1 og P_2 inntil brudd inntraff. $P_1 > P_2$. På tegningen er også isens elastisitetsgrenser for de to belastningene angitt. Ved større belastninger inntreffer brudd hurtigere. Dessuten er elastisitetsområdet større for store belastninger enn ved mindre. Diagram b viser at sammenhengen mellom bøyningen og belastningstiden inntil brudd skjer, er lineær.

Diagram c. Kurvene viser sammenhengen mellom bøyning og belastningstid henholdsvis ved belastningsstedet og 75 og 120 cm fra dette.

Undersøkelsene bekrefter i det vesentlige at en isflate teoretisk kan betraktes som en elastisk plate som hviler på et mykt elastisk underlag.

2. Undersøkelser av isens påkjenning ved et overfartssted.

På et overfartssted på en større elv ble det lagt jernbanespor og bøyningen i isdekket målt i faste punkter med forskjellige avstander fra jernbanelinjen.

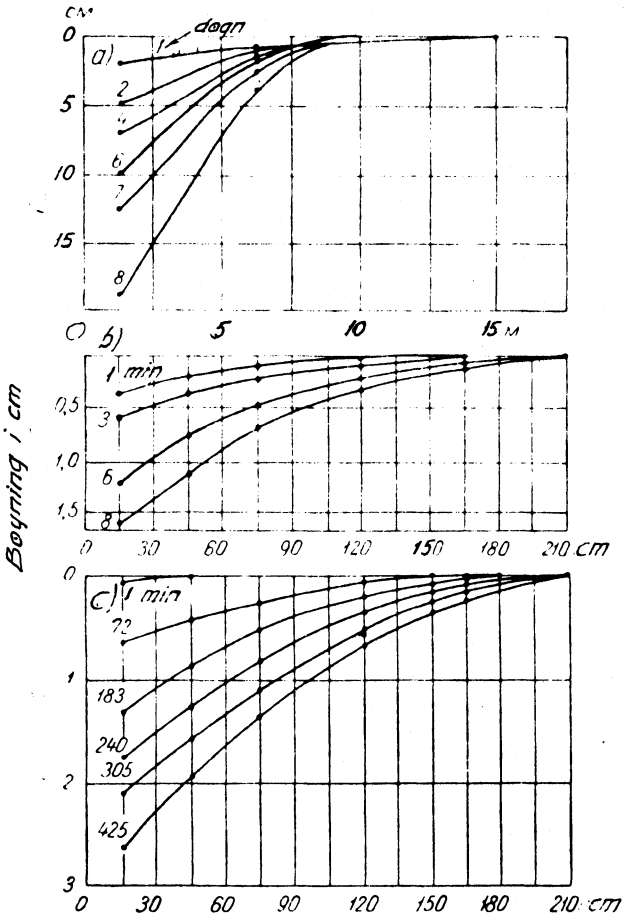
Det dreier seg her om tre forskjellige belastninger
a) snøens vekt, b) vekten av selve jernbanesporet og c) vekten av toget.

a: Snøen ble skjøvet vekk i ca. 100 m bredde før jernbanesporet ble lagt, og lagret i store brøytekanter omkring 1 m høye. På innsiden av brøytekantene slo isen sprekker som holdt seg hele vinteren og av og til steg vann opp.

b: Etter at skinnegangen ble lagt, ble bøyningen målt i 2 profiler i punkter med forskjellige avstander fra jernbanesporet, og måleresultatene er gitt i følgende tabell.

Fig. 1

Bøyningens avhengighet av avstanden fra belastningen og av tiden

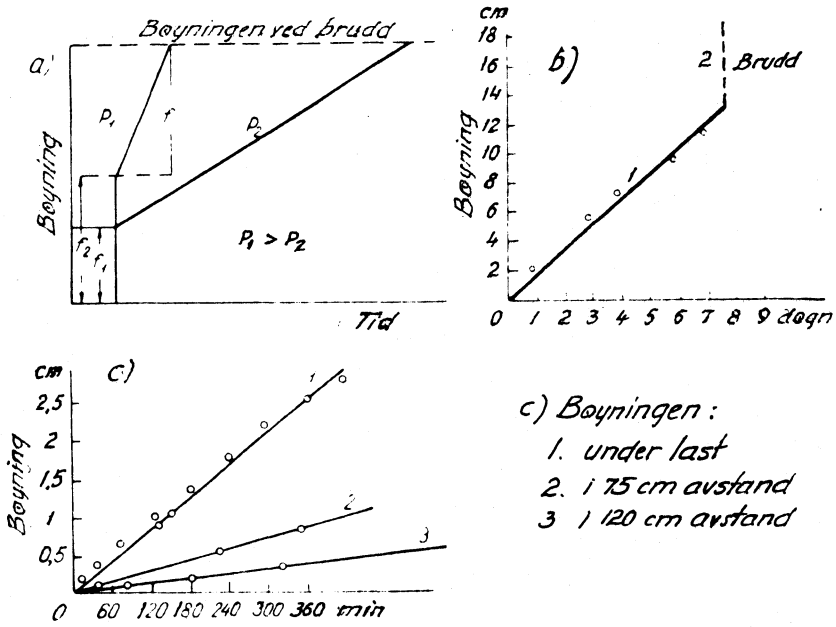


a.) P = 6 tonn
h = 40 cm
Tiden i døgn

b.) P = 32 kg
h = 1,5 cm
Tiden i min

c) P = 7.2 kg
h = 1 cm
Tiden i min

Sammenheng mellom bøyningen og tiden inntil brudd



b) h = 40 cm

c) Bøyningen:
1. under last
2. i 75 cm avstand
3 i 120 cm avstand

a) Effekt av plastisk og elastisk deformasjon

Avstanden fra jernbanelinjen i m	Bøyning i mm Profil 1	Profil 2	Avstanden fra jernbanelinjen i m	Bøyning i mm Profil 1	Profil 2
0,0	172	-	15,0	43	16
2,2	164	220	25,0	32	10
5,0	115	103	50,0	4	-
10,0	68	30			

Merknad: Under jernbanelinjen i profil 2 dannet det seg sprekker. Grensen for sprekkdannelse var ved en bøyning på 220 mm. Isens tykkelse er ikke oppgitt.

Ved en lignende forsøksanordning på tynnere is (0,26 m) ble det undersøkt; se fig. 2.

1. Hvorledes bøyningen i avstandene 0, 2.2, 5.0 og 10 m varierte med tiden. Det viste seg at bøyningen økte i de første 200 timene. Senere holdt den seg noenlunde konstant, se diagram 1.

2. hvor langt fra jernbanelinjen bøyningen var merkbar. Se diagram 2. I ca. 30 m avstand hadde belastningen ingen innvirkning.

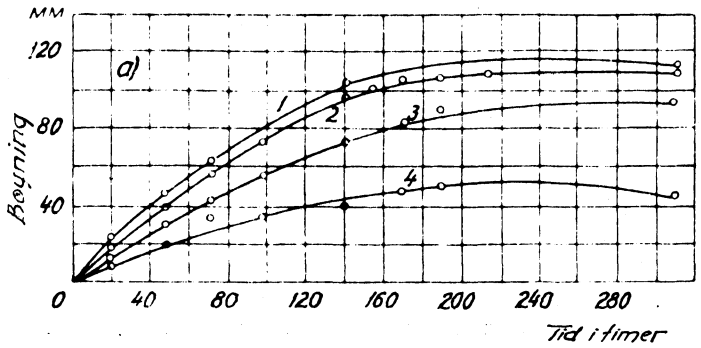
c: Diagram 3 på fig. 2 viser bøyningen i forskjellige avstander fra jernbanelinjen når en vogn med vekt henholdsvis 10,5 tonn, 25,3 tonn og 39,8 tonn ble kjørt over. Istykkelsen var 0,51 m. Bøyningen avtok med avstanden. Avhengig av belastningen var det ingen merkbare deformasjoner i avstander over 15-30 m.

På diagram 4 er vist hvordan bøyningen i et bestemt punkt varierte når vognen kjørte over. Målingene viste at til å begynne med bulet isen ved målestedet seg litt opp; men etterhvert som vognen nærmet seg målestedet tiltok bøyningen og var størst i det vognen passerte. Etter på avtok bøyningen igjen raskt, men for de største belastninger ble en liten plastisk deformasjon tilbake. Mellom deformasjonens størrelse og vognens vekt var det ingen lineær sammenheng.

Diagram 5 viser sammenhengen mellom største bøyning og belastningen i tonn for 3 forskjellige istykkelse (1) 68 cm, (2) 58-59 cm, (3) 50 cm.

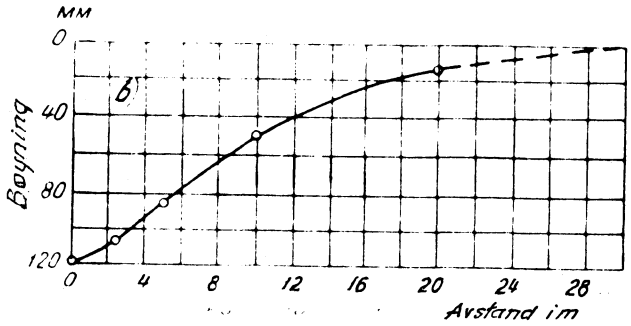
Fig. 2

Undersøkelser ved et overfartssted

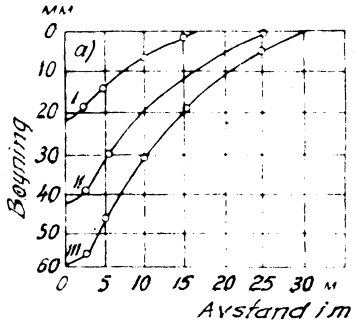


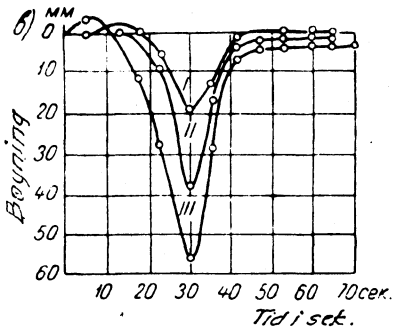
a) P = 700 kg pr løpende m

1. under jernbanelinje
2. i 2,2 m avstand
3. i 5 m avstand
4. i 10 m avstand



b) Bøyning ved en belastning av P = 900 kg pr løp. m

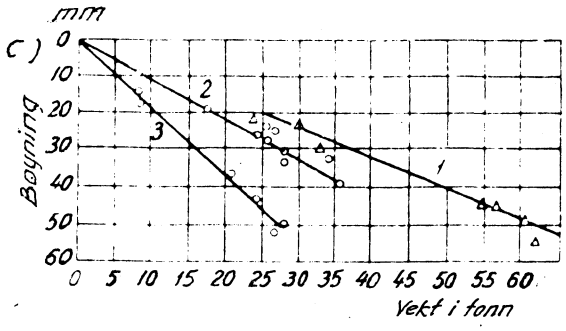




a) Maksimale bøyninger

I. P = 10,5 tonn
II P = 25,3 tonn
III P = 39,8 tonn

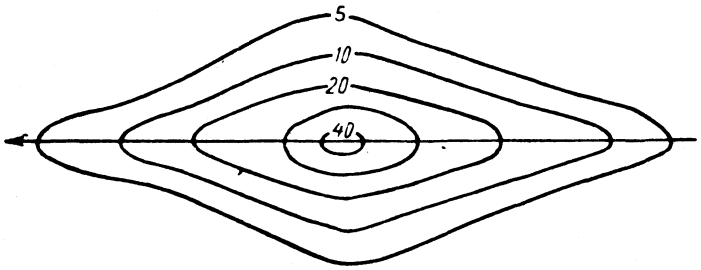
b) Bøyningens variasjoner



c) Sammenhang mellom maks. bøyning og belastningen

1. h = 68 cm
2. h = 58-59 cm
3. h = 50 cm

Bøyninger ved en dynamisk påkjenning



Bøyningens størrelser i mm
P = 23,5 tonn. Hastighet 18 km/time

Nedenfor er gitt en tabell over observasjonsresultater av isens bøyning når jernbanevogner ble kjørt over

Isdekkets bøyninger under togkjøring.

P tonn	Belastningens lengde i m	Isens tykkelse h cm	Belastningens hastighet km/time	Lufttemp. ^{o}C	Største bøyning i 2,1 m avstand fra jernbanelinjen
8	1,75	59	21	- 7,6	9
16	8,8	63	21	- 1,6	15
24	11,25	59	17	- 7,6	38
26	11,25	64	17	- 5,2	26
35	8,8	69	15	- 5,2	36
37	8,8	60	15	- 5,2	35
55	15,6	68	17	- 0,8	46
57	15,6	68	9	- 5,7	46
62	15,6	68	18	- 0,8	58

På fig. 2 diagram 6 er vist hvorledes bøyningen fordeler seg i området omkring jernbanesporet når et tog med vekt 23,5 tonn passerer med en hastighet av 18 km/time. Den som undersøkte disse forhold fant at i det område hvor bøyningen var merkbar, var forholdet mellom største lengde og største bredde som 3,2 : 1,7. Undersøkelsen ble foretatt med belastningslengder mellom 1,7 til 15,6 m.

Iakttagelser ved overfartsstedet viste at hvis bøyningen ikke oversteg 50 mm var det ingen tegn til svekkelse av isdekket. Ved bøyninger fra 60 til 90 mm var det tendensen til sprekkdannelse, ved 90 - 120 mm bøyning var det allerede gjennomgående sprekker og nedsynkninger. Ved 120 - 150 m bøyning ble isens bæreevne så svekket at det etterpå bare kunde overføres enkelt-vogner og selv det medførte sprekkdannelser. Ved bøyning større enn 150 mm brast isen.

3. Undersøkelse av deformasjonen av et isdekke ved dynamisk og statisk belastning.

Bøyningen i et fast isdekke ble målt når tog med forskjellig vekt ble kjørt over. En undersøkelse ble foretatt i januar måned. Istykkelsen var da ca. 0,5 m. Neste undersøkelse var i mars da istykkelsen var over 1 m. Det ble kjørt enkelt-vogner og med vognsett. Måleinstrumentet var plassert 2 m fra jernbanelinjen.

I følgende tabell er gitt måleresultatene når enkeltvogner ble kjørt over.

Vekt i tonn	Bøyning i mm	Relativ bøyning mm/tonn	Vekt i tonn	Bøyning i mm	Relativ bøyning mm/tonn	
8,71	11,7	1,34	22,90	33,2	1,45	
11,80	17,0	1,44	24,50	34,0	1,39	
13,06	18,3	1,40	6,94	5,5	0,79	
13,96	19,0	1,36	13,52	6,4	0,47	
16,90	21,6	1,26	14,66	6,9	0,47	h = 1,26 m
17,70	24,0	1,36	15,57	8,0	0,51	
20,10	26,9	1,34	23,14	11,8	0,51	
20,98	32,0	1,52				

De 5 siste målingene ble foretatt på tykk is (1,26 m). Som en ser av tabellen er den relative bøyning omtrent konstant for en og samme istykkelse.

Neste tabell gir måleresultatene når det ble kjørt med vognsett. Målingene ble foretatt i 3 punkter. Det første under selve toget og de to andre i avstander henholdsvis 15 og 30 m.

Istykkelse i m	Vekt i tonn	Bøyning like under toget mm	Avstand fra toget 15 m	30 m
0,46	8,7	11,8	3,9	-
	11,8	15,1	6,3	0,41
	13,1	17,6	6,1	-
	18,0	25,6	6,9	0,1
	20,3	25,5	-	0,1
1,38	46,2	28,0	13,1	3,4
	39,7	22,8	10,2	2,8

Bøyningen ble merkbar først 33 - 45 m foran toget. Belastningens størrelse hadde stor innflytelse på bøyningen like under toget, men mindre i området omkring. Eks. Belastninger på 8 - 15 tonn hadde et område med radius ca. 34 m hvor bøyningen var merkbar, og for belastninger på 16 - 46 tonn var deformasjonsområdets radius ca. 39 m.

For å undersøke deformasjonsområdet nærmere ble det foretatt målinger av bøyningen i avstand 2, 15, 20 og 30 m fra skinnegangen. Istykkelsen var 0,46 - 0,63 m. Måleresultatene er gitt i følgende tabell.

Vekt i tonn	Avstand fra jernbaneskinnene i m		
	2	15	20
7,2	5,5	3,7	-
8,7	11,8	3,5	-
11,8	17,0	5,7	-
13,1	18,3	6,7	-
14,0	19,0	6,8	-
16,9	21,6	8,5	-
18,0	24,6	10,0	3,3
22,9	33,6	10,0	4,6

I avstanden 30 m var bøyningen ikke merkbar.

I neste tabell er gitt målinger av deformasjonsområdets radius ved forskjellige istykkelser, men med samme belastning.

Istykkelse i m	Deformasjonsområdets radius	Istykkelse i m	Deformasjonsområdets radius
0,51	21,4	1,00	32,0
0,75	25,6	1,05	40,0

Virkningsområdets radius er større jo større istykkelsen er. Dette stemmer overens med elastisitetsteorien.

Alle foregående observasjoner ble foretatt med en kjørehastighet under 10 km/time.

Forfatteren gir også en oversikt over deformasjonen ved stillestående tog. Den relative bøynings avhengighet av belastningstiden er vist på fig. 3 diagram 1 for forskjellige belastninger og istykkelser. Av de grafiske fremstillingene kan en se at

a) den absolutte bøyning øker med tiden
b) den hastighet som den plastiske deformasjonen foregår med, er avhengig av belastningen og isens tykkelse. Den tiltar med økende belastning og avtar med voksende istykkelse.
c) den plastiske deformasjon øker forholdsvis fort til å begynne med, senere saktere og etter en tid holder den seg noenlunde konstant. Det går tydelig frem av kurve 4 og 5.

Den plastiske deformasjon ble også undersøkt på følgende måte: To plater 3,1 · 0,7 m ble belastet med 2,5 tonn og en tredje 1,0 · 0,7 m med 0,5 tonn. På de 2 første varte belastningen 142 timer og på den 3 dje 63 timer. Istykkelsen var 0,68 m. Når belastningen ble tatt av etter 55 timer minket bøyningen 7 mm ved de to første og 10 mm ved den tredje. Den resterende varige deformasjon ved de to første var 20 mm og ved siste 17 mm.

Spesielle undersøkelser ble foretatt på en islagt innsjø med belastninger av forskjellige hastigheter. Resultatene av målingene viste at hastighetene hadde stor innvirkning på bøyningens størrelse og forløpet av bøyningskurvene. På fig. 3 diagram 2 er vist bøyningen ved forskjellige belastninger og hastigheter i kjøreretning fra høyre til venstre. På øverste del a) var sjøens dybde 5-6 m, isens tykkelse var 0,38 m. I alt ble foretatt 8 forsøk. I de første tre var belastningen 10,5 tonn og i de 5 siste 14 tonn. Hastigheten er oppgitt på fig. 3, a.

På den nederste del b) på tegningen var dybden ved målestedet 7 m. Isens tykkelse den samme. Det ble foretatt 5 forsøk. Belastningen var 10,5 tonn på nr. 1 og 14,5 tonn på resten. Hastighetene se fig. 3,b.

Kurvene er tegnet ved en selvregistrerende apparatur. Apparatene var plassert to meter fra veitraseen og med 50 meters avstand. Kurvene viser hvordan belastningen og hastigheten innvirker på isens bøyning og utbredelseområdet. Maksimum bøyning ser ut til å opnåes ved en hastighet mellom 25 - 30 km/t. Ved større hastigheter som 50-70 km/t observertes ingen nevneverdig bøyning.

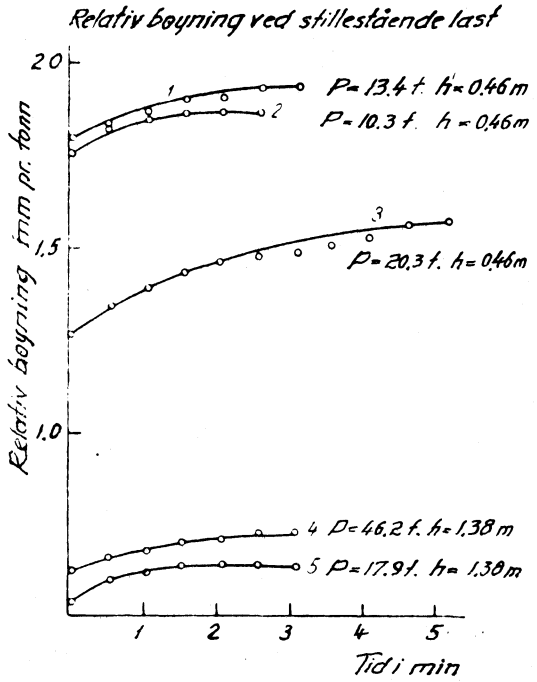
Fig. 3 diagram 3 viser sammenhengen mellom relativ bøyning og belastningens hastighet. Dybden ved undersøkelsestedet var 5-6 m. Kurven viser et utpreget maksimum ved 27 km/t. Statisk bøyning gav en verdi av 2,77 mm/tonn (se prikket linje 1).

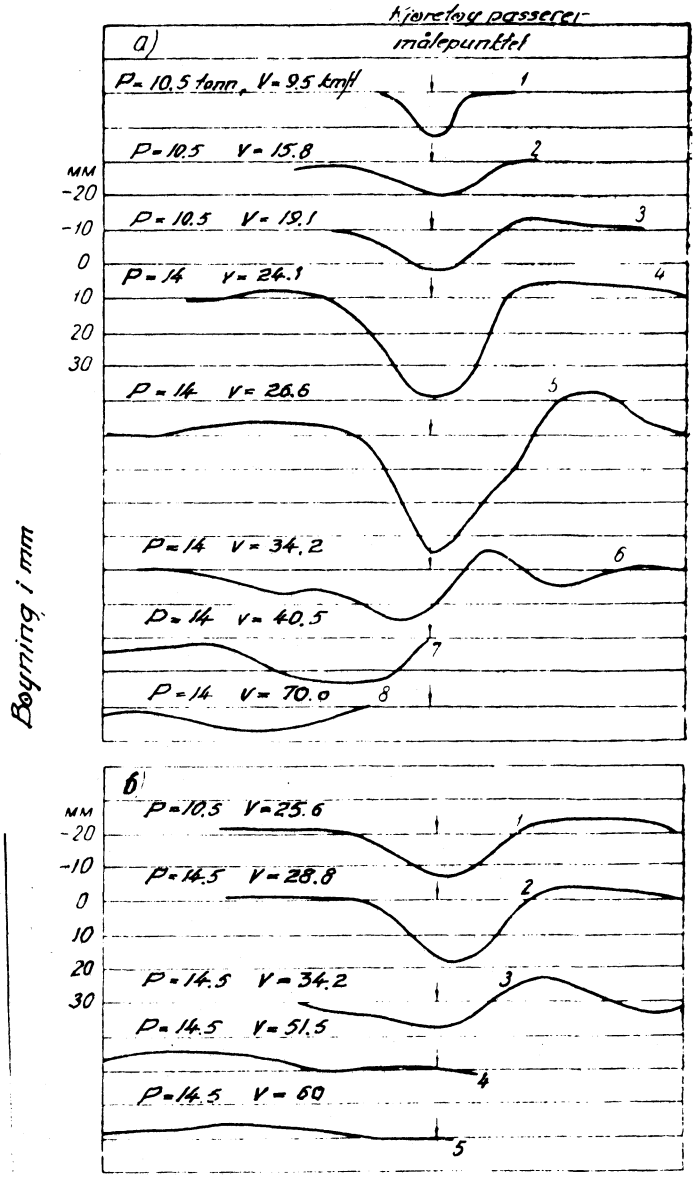
Fig. 3 diagram 4 viser sammenhengen mellom bølgens høgde foran belastningen ved forskjellige hastigheter ved to forskjellige dybder. For kurve nr. 1 var sjødybden 5,6 m og for nr. 2 6,3 m.

På fig. 4 diagram 1 er gitt bøyning av isdekket når belastningen var 14 tonn, istykkelse 0,38, og for hastighetene 24,1 km/t og 28,8 km/t. Dybden ved målestedene (kurvene 1,2,3) er henholdsvis 7,5 m, 6,3 m og 5,6 m. Undersøkelsene viste at bøyningen er mindre jo større dybden er. Dessuten endrer bøyningskurven form når dybden og hastigheten endres.

På fig. 4 diagram 2, 3 og 4 a og b er gitt bøyningskurvene når hastighetene har vært henholdsvis under, lik og over den kritiske hastighet (ca. 30 km/t).

Isdekkets bøyning ved statisk og dynamisk belastning





Istykkelse h = 38 cm

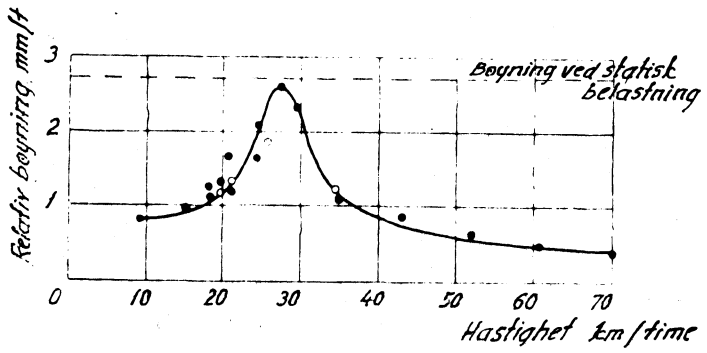
a) Sjøens dybde 5-6 m

b) Sjøens dybde 7 m

Måleapparatet plasert 2 m fra veitrassen

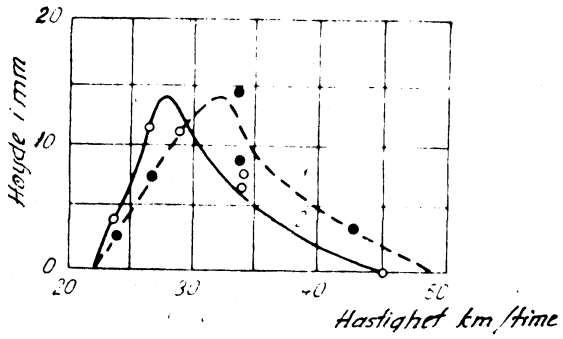
Isdekkets bøyning under bevegelig last

Sammenhengen mellom rel. bøyning og kjørehastighet



Sjøens dybde 5-6 m

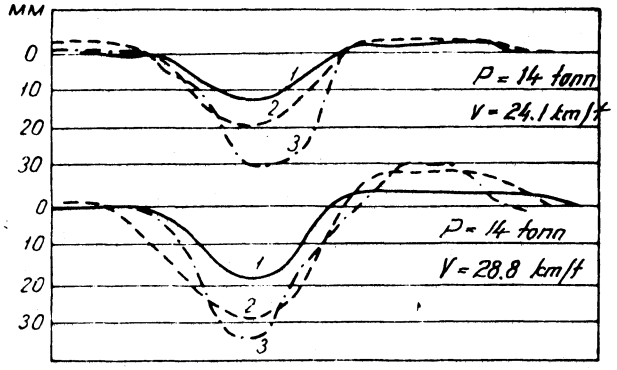
Høyden av bølgen foran belastningen ved forskjellige hastigheter



1. Sjøens dybde 5.6 m
2 " " 6.3 m

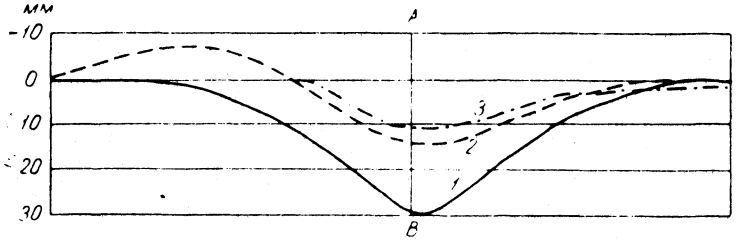
Isdekkets bøyning ved dynamisk belastning

Bøyningens avhengighet av sjøens dybde



Istykkelse 38 cm
Sjøens dybde
Kurve 1. 7,5 m
" 2. 6,3 m
" 3. 5,6 m

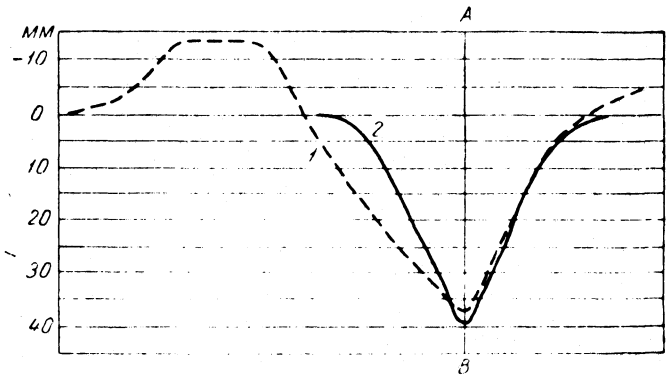
Bøyning ved hastigheter mindre enn den kritiske



Istykkelse 38 cm
Belastning 10,5 tonn
Kurve 1 Statisk belastning
" 2 V = 20,2 km/t.
" 3 V = 8.9 km/t.

Bøyning ved hastighet omtrent den kritiske

Bøyning i mm

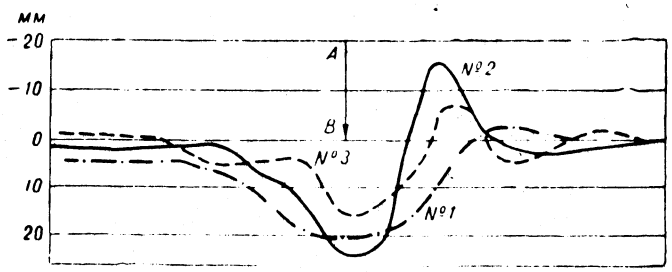


Kurve 1. V = bølgens forplantnings hastighet

Kurve 2. Statisk belastn.

Bøyning ved hastigheter over den kritiske

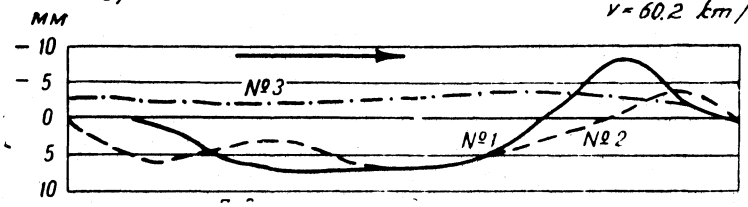
a)



V = 34.2 km/t

Kurvene gjelder for 3 målepunkter i forskjellige avstand fra veitrasen

b)



V = 60.2 km/t

Undersøkelse av støts virkning på isdekket.

Prøvene ble foretatt med en vekt på 57,5 kg som ble sluppet fra 2 og 3 m høyde. Maksimal bøyning ble målt til 15 mm og den inntraff 0,1 sek. etter støtet. De dempete bølger som oppstod hadde en bølgelengde på 0,99 m.

Bøyningen ved støt er vesentlig mindre enn ved statisk trykk av samme størrelse.

Ved støt virker vannet under isdekket praktisk talt som usammentrykklig.

Undersøkelse av deformasjonene på sjøisdekke.

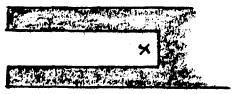
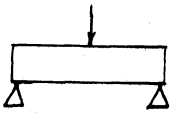
På lignende måte som for ferskvannsis kan en undersøke bøyningen på sjøis både ved statiske og dynamiske belastninger.

Eksempler fra målinger: 1. Ved statisk belastning på 4,5 tonn var bøyningen 2,5 mm. Istykkelsen var 0,7 - 0,8 m.

2. Ved dynamisk belastning 2-3 tonn varierte bøyningen fra 4 - 13 mm. Istykkelsen var 0,5 - 0,6 m.

Forsøkene ble foretatt under naturlige forhold. Isens saltgehalt var 4-6 °/oo.

Sjøisens bruddspenning ble undersøkt på 3 forskjellige måter og måleresultatene er samlet i følgende tabell.

Metoden bruddspenningen ble målt på	Antall forsøk	Bruddspenning kg/cm² midlere	maks.	min.
	151	33,0	63,0	8,3
	11	41,0	78,0	16,3
	27	46,3	92,7	31,4
	6	52,5	62,0	34,5
	228	45,1	114,2	19,0

Den midlere lufttemperatur under forsøkene kan antas - 1,4 °C.

Undersøkelsene viste at sjøisens bruddfasthet er omtrent 1/4 av ferskvannsis.

Eksperimentene viste at det er svært viktig å skille mellom statisk og dynamisk påkjenning.

Statisk belastning karakteriseres ved

$$\Sigma P_y = \Sigma R_i$$

der P_y angir ytre krefter og R_i isens indre reaksjoner.

Påkjenningene ved dynamisk belastning derimot kan bestemmes ut fra arbeidsligningen:

$$\Sigma A_y = \Sigma A_i$$

der A_y og A_i betegner henholdsvis ytre og indre arbeid.

En last som beveger seg med liten fart bortover isen, kan tilnærmet anses som statisk belastning. Med større fart må en enten utføre beregningene ut fra dynamiske betraktninger, eller en må innføre en "dynamisk korreksjon" til de statiske beregningene.

Store trykkforandringer, f.eks. detonasjoner, støt ved landing med fly på isen, eller større vibrasjoner fra tunge kjøretøyer behandles rent dynamisk.

B. Metoder til beregning av isdekkets bæreevne.

Beregningsmetodene kan deles i 3 fundamentelle grupper:

a. Metoder bygget på erfaringer
b. Forenklete beregningsmetoder bygget på analogiprinsippet
c. Beregningsmetoder bygget på elastisitetsteorien.

De reaksjoner som oppstår i et isdekke under belastningen er mange og temmelig kompliserte, slik at det ikke er mulig entydig å fastsette isens bæreevne på samme måte som ved vanlig bygningsmaterialer (tre, betong, jern e.l.). Derfor brukes i praksis vesentlig enkle empiriske formler. Disse går forfatteren ikke nærmere innpå.

1. Forenklete beregningsmetoder bygget på analogiprinsippet.

En kan ta utgangspunkt idet eksperiment at et rent stålisdekke med tykkelse h = 24 cm tålte en belastning av P = 6 tonn. Av dette finner vi at:

For ferskvannsis $h_{st} = 10\sqrt{P}$ eller $P = \frac{h^2}{100}$

For sjøis er fastheten mindre og en finner:

$$h_{sj} = 17{,}3\sqrt{P} \quad \text{eller} \quad P = \frac{h^2}{300}$$

I formlene er P gitt i tonn og h i cm.

Selv om isens tykkelse har en vesentlig betydning er det flere andre faktorer, så som isens temperatur og kvalitet, vannstandsvariasjoner og sprekkdannelse m.v., som gjør det klart at ovenfor nevnte formler bare kan brukes i ideelle tilfeller. I naturen vil en lett finne at en ikke uten videre kan benytte de middelverdier som forskere har kommet fram til.

Når det gjelder is, må en i høy grad ta hensyn til hva beregningene skal brukes til. Dreier det seg om bruk av isen til nytteformat (transport på isen e.l.), må en alltid bruke de laveste bruddspenningene. Ved kamp mot isen derimot (f.eks. isbryting), må de høyeste bruddspenningene legges til grunn.

Et bedre grunnlag for bedømmelse av isens bæreevne kan vi få hvis vi betrakter en isflate som et elastisk legeme flytende på et mykt elastisk underlag. En rekke russiske forskere har på denne måten kommet til følgende formel:

$$P = \frac{B}{N} h^2 K S,$$

hvor P er maksimal tillatte belastning i tonn, B er en koeffisient som karakteriserer lasten (100 - er for last på hjulredskap, 125 - for beltetraktor inntil 18 tonn, 115 - for beltetraktor eller stridsvogn mer enn 18 tonn), h er den målte istykkelse (av ren stålis, uten snø og sørpeis) og K er en faktor avhengig av isens temperatur, som kan beregnes på følgende måte:

$$K = \frac{100 + \theta}{100}$$

hvor θ er luftens middel temperatur for siste 3 døgn i en kuldeperiode. For en mildværsperiode er

$$K = 1 - 0{,}05\ n,$$

hvor n er antall dager fra den tiden smeltevann (sørpe) er kommet på isen.

S er en koeffisient. For ferskvannsis er S = 1. For sjøis kan antas S = 0,7.

2. Beregningsmetoder bygget på elastisitetsteorien.

Denne metoden gir en bedre begrunnet løsning av problemet. En betrakter isdekket som en ubegrenset elastisk flate hvilende på et mykt elastisk underlag. Betraktningen deles opp i to:

1. Belastning av liten utstrekning - sentral bøyning
2. Jevn fordelt belastning over en lang utstrekning - sylindrisk bøyning.

Isdekket må i alle tilfelle være stort i forhold til belastnings flate.

1. Sentral bøyning.

Beregnings skjema er vist på følgende tegning. På skjemaet er også gitt de betegnelser som forfatteren har brukt i sine matematiske betraktninger.

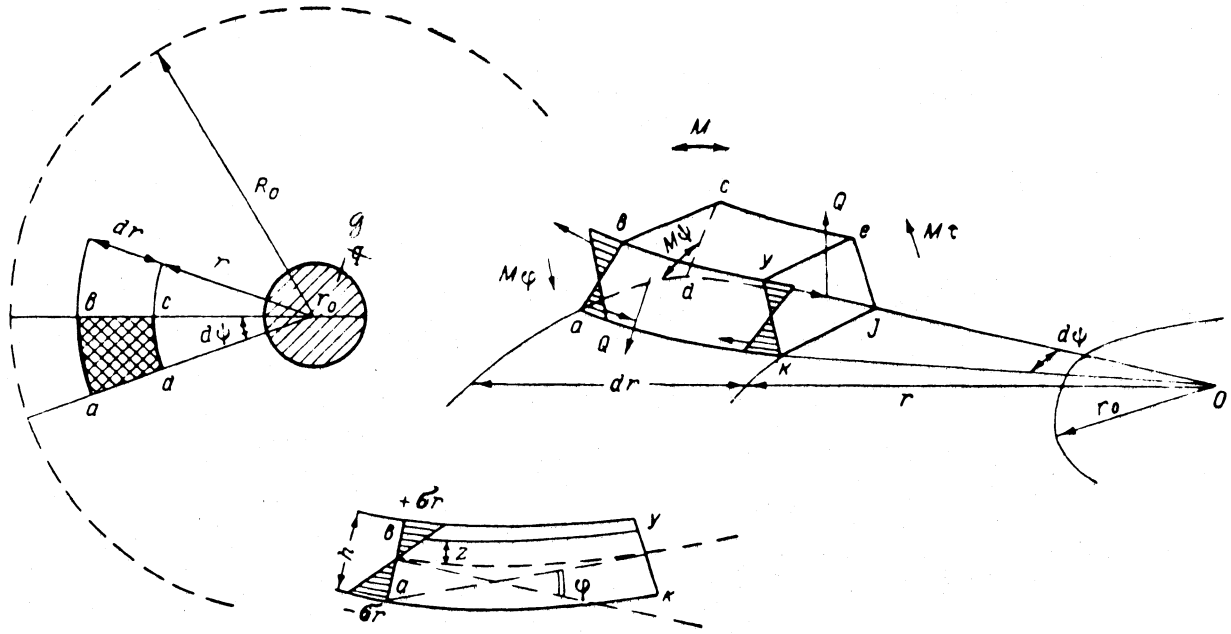
Likevekstsligningen for et vilkårlig element er:

$$M = M_\varphi - M_\psi - M_\tau \quad \text{som gir ligningen}$$

$$r\frac{d^3f}{dr^3} + \frac{d^2f}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{df}{dr} = -\frac{12(1-n^2)}{Eh^3}\left[\frac{P}{2\pi} + \gamma\int_0^r fr\,dr\right]$$

E er elastisitetsmodel.

Beregningsskjema for ligninger bygget på elastisitetsteorien.



Følgende betegnelser er innført:

P - total belastning på isen

g - belastning på flateenhet innenfor belastningsfeltet

r_0 - radius av belastningsfeltet

h - isens tykkelse

R_0 - avstand fra sentrum til området hvor bøyningen er merkbar

r - avstand fra sentrum til deformasjonselementet

σ_r og σ_φ er normalspenninger på flatene av elementet

σ_τ - tangentialspenningen på elementet

Q - skjærkraft som virker på kantene av elementet

M - bøyningsmomentet som virker på elementets underste flate

M_φ, M_ψ, M_τ - bøyningsmomentene som virker på elementet fra innerste spenning

R - vannets trykk mot isens underflate

γ - vannets spesifikk vekt

f - bøyning i et vilkårlig punkt i det deformerte isdekke

n - Poissons koeffisient

z - avstand fra nøytral flate til en vilkårlig paralell flate

Deriveres ligningen en gang til med hensyn på r og hvis $\gamma = 1$, så fåes:

$$\frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2d^3 f}{r dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{df}{dr} = -\frac{f}{l^4} \; ; \; \text{hvor } l = \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-n^2)}}$$

Det generelle integral er:

$$f = C_1 z_1\left(\frac{r}{l}\right) + C_2 z_2\left(\frac{r}{l}\right) + C_3 z_3\left(\frac{r}{l}\right) + C_4 z_4\left(\frac{r}{l}\right)$$

Her C_1, C_2, C_3 og C_4 er integrasjons konstanter og

z_1, z_2, z_3 og z_4 er enkelt integraler av Bessel og Hankel typen.

Forfatteren gir følgende verdier for momentene M, M_y, M_φ og M_r:

$$M = \gamma \int_0^r f \, d\psi \, r (dr)^2 \; ;$$

$$M_\varphi = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \left(\frac{d\sigma_r}{dr} r + \sigma_r \right) z \, d\psi \, dz \, dr \; ;$$

$$M_\psi = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \sigma_\psi z \, dr \, d\psi \, dr$$

$$M = Q \, dr = \frac{P}{2\pi} d\psi \, dr$$

Elementets normalspenninger er:

$$\sigma_r = \frac{E_z}{1-n^2}\left(n\frac{\varphi}{r} + \frac{d\varphi}{dr} \right) \; ; \; \sigma_\psi = \frac{E_z}{1-n^2}\left(n\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r} \right) \; ;$$

og

$$M_\varphi = \frac{n^2 E}{1-n^2}\frac{h^3}{12}\left(\frac{r}{n}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{n}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\varphi}{dr} \right) d\psi \, dr \; ;$$

$$M_\psi = \frac{n^2 E}{1-n^2}\frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{n}\frac{\varphi}{r} + \frac{d\varphi}{dr} \right) d\psi \, dr \; ;$$

Hvis vi innfører verdier M_φ, M_φ og M_r i likevekslingen og deler ligningens begge sider med $d\varphi\, dr$, fås vi:

$$\frac{n^2 E}{1-n^2}\frac{h^3}{12}\left(r\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{r}-\frac{P}{2\pi}\right)+\gamma\int_0^r r\,dr=0$$

Det er å bemerke at φ i ligningen kan erstatte med bøyning f

d.v.s. $\varphi = \frac{df}{dr}$;

Isdekkets bæreevne er funksjon av isens seighet $\frac{Eh^3}{12}$

Fra fasthetslæren er $\sigma_{maks} = \frac{M}{W}$, hvor $W = \frac{b.h^2}{6}$

Antar b = 1 og $M = M_{maks}$, fåes $\sigma_{maks} = \frac{6\,M_{maks}}{h^2}$;

Maksimale bøyningsmoment er gitt ved følgende form:

$$M_{maks} = \frac{P}{\pi r_0^2}\,\ell^2 C_2\left(\frac{r_0}{\ell}\right)\frac{1+n}{2}$$

og da blir: $\sigma_{maks} = \frac{3(1+n)\,g\,\ell^2}{h^2}C_2\left(\frac{r_0}{\ell}\right)$; Den maksimale

tillate belastning $g = \frac{P}{\pi r_0^2} = \frac{\sigma_{maks}\,h^2}{3(1+n)\,\ell^2 C_2\left(\frac{r_0}{\ell}\right)}$

Dette er resultat av en streng matematisk behandling, men i praksis er det vanskelig å bruke denne ligningen.

Hvis en antar at n = 0,3 for både ferskvanns- og sjøis og at E for vårisen ved temperatur over - 5° er 10^5 tonn/m², for god vinteris under snødekke er 4 x 10^5 tonn/m² og for hard snøfri vinteris 5,5 x 10^5 tonn/m², får vi følgende uttrykk for g for praktisk bruk under naturlige normale forhold

1. for myk våris:

$$g = \frac{\sigma_{maks}\,h^{5/4}}{13{,}2\,(1{,}16\,r_0 - h^{3/4})}\,;$$

2. for vinteris dekket med snø:

$$g = \frac{\sigma_{maks}\, h^{5/4}}{26.4\,(0.823\, r_0 - h^{3/4})}$$

3. for god snøfri vinteris:

$$g = \frac{\sigma_{maks} \cdot h^{5/4}}{31\,(0.76\, r_0 - h^{3/4})}$$

Det er å bemerke at elastisitetsmodulen spiller forholdsvis liten rolle for spenningens størrelse og den tillatte belastning, da den i formlene inngår som 4 rot.

2. Sylindrisk bøyning.

Belastningen er jevnt fordelt på et belte ubegrenset lengde og bredden d,

$p = \frac{g}{d}$, hvor p er belastning pr. løpende meter.

Ligningen for belteaksen er:

$M = E\,I\,\frac{d^2 f}{dx^2}$, hvor I er treghets moment og x er avstanden fra belastningens akse og til det snittet hvor bøyningen betraktes.

Hvis p er belastning på en lengdeenhet, og q er skjærekraft i tverrsnittet i avstand x, så er:

$q = \frac{dM}{dx}$ og $p = \frac{dq}{dx}$ Setter vi inn M, fåes

$p = \frac{d^2 M}{dx^2}$ eller $p = E\,I\,\frac{d^4 f}{dx^4} = kf$

hvor k er koeffisient som karakteriserer underlagets elastisitet.

Ved integrering fåes:

$$f = (D_1 e^{mx} + D_2 e^{-mx}) \cos mx + (D_3 e^{mx} + D_4 e^{-mx}) \sin mx ,$$

hvor D_1, D_2, D_3 og D_4 - integrasjons konstanter og $m = \sqrt{\frac{b.k}{4EJ}}$

For bøyningsmomentet og skjærkraften gir forfatteren følgende uttrykk

1. For avsnitt innenfor belastnings grensen:

$$M = -\frac{q}{m^2}\left(-\frac{1}{4} N_\beta C^{11}_\varphi - \frac{1}{4} N^1_\beta C_\varphi\right);$$

$$q = -\frac{q}{m^2}\left(-\frac{1}{4} N_\beta C^{111}_\beta - \frac{1}{4} N^{11}_\beta C^1_\varphi\right);$$

2. For avsnitt utenfor belastningens grensen:

$$M = -\frac{q}{m^2}\left(\frac{1}{16} C^{111}_\beta N^{111}_\varphi - \frac{1}{4} C^1_\beta N^1_\varphi\right)$$

$$q = \frac{q}{m^2}\left(-\frac{1}{4} C^{111}_\beta N_\varphi - \frac{1}{4} C^1_\beta N^{11}_\varphi\right)$$

Også her er C_φ, C^1_φ, C^{11}_φ, C^{111}_φ, C^1_β, C^{111}_β, N_β, N'_β, N^1_φ, N^{11}_φ, N^{111}_φ integrasjons konstanter. Indexen φ betyr at C og N beregnes som funksjoner av argument $\varphi = mx$. Indexen β betyr tilsvarende at C og N beregnes til argument $\beta = \frac{d}{2} - m$.

Regner vi at:

$\sigma = \frac{M}{W}$ og $W = \frac{h^2}{6}$, så er maksimale normale

spenninger i isen:

1. Hvis belastningen er fordelt over hele bredden d

$$\sigma_{maks} = 1{,}73\sqrt{E}\,\frac{q}{\sqrt{h}}\sin\beta\,(\mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta) =$$

$$= a_1\frac{q}{\sqrt{h}}\sin\beta\,(\mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta), \text{ men } q = \frac{q_1}{d}$$

og $$\sigma_{maks} = a_1\frac{q_1}{d\sqrt{h}}\sin\beta\,(\mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta);$$

2. Til belastningen rettet på linien, d = 0

$$\sigma_{maks} = 1,14 \sqrt[4]{E} \frac{q_1}{h^{5/4}} = a_2 \frac{q_1}{h^{5/4}}$$

hvor $q_1 = p_1$ (ved b = 1)

I disse formlene er koeffisientene a_1 og a_2 bare avhengig av isens elastisitets modulen.

$$a_1 = 1,73 \sqrt[4]{E} \quad a_2 = 1,14 \sqrt[4]{E}$$

De endelige formlene for den tillatte maks. belastningen er:

På beltet d:

$$q_1 = \frac{d\,\sigma_{maks} \sqrt{h}}{a_1 \sin\beta(\mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta)}$$

Hvis d = 0

$$q_1 = \frac{\sigma_{maks}\, h^{5/4}}{a_2}$$

3. Beregning av isens bæreevne.

Hovedoppgaven for beregningen er å finne den største tillatte belastning som er avhengig bl.a. av dens belastningsflate, isdekkets struktur og tykkelse, virkningen av forandringer i de meteorologiske forhold, av elvens eller sjøens topologi.

Til hjelp under beregningen er det utarbeidet spesielle diagrammer, fig. 5 og 6.

De 3 øverste diagrammene på fig. 5 benyttes til:

a. beregning av Devik's koeffisient

b. til beregning av isdekkets midlere temperatur hvis det er dekket av snø

c. det samme for snøbar is.

De tre nederste diagrammer på fig. 5 er til beregning av maksimal spenning

a. For sjøis, saltholdighet 4-6 %.

b. For ferskvannsis, stålis.

c. For ugjennomsiktig is (av dårligere kvalitet enn stålis).

På fig. 6 benyttes diagram 1 til bestemmelse av isens bæreevne ved sentral bøyning og diagram 2 det samme ved sylindrisk bøyning. De to nederste diagrammer kan benyttes til beregning av isens bæreevne for belastninger med forskjellige hastigheter.

a. gir sammenhengen mellom kritisk hastighet og dybdeforhold ved forskjellige istykkelser

b. viser sammenhengen mellom relative hastighet og relative belastning.

For å kunne beregne isens bæreevne må en først kunne finne størrelsen av de faktorer som er av vesentlig betydning: istykkelse, isens temperatur, den maksimale spenning, elastisitetsmodulen og Poissons størrelse.

Istykkelse.

Et isdekke består i alminnelighet av islag av forskjellig kvalitet (bæreevne). Forfatteren skjelner mellom 3 forskjellige slags is: stålis, sammenfrosset vannsørpe (ugjennomsiktig is) hvis bæreevne anslås til halvparten av stålisens, og sammenfrosset snøsørpe hvis bæreevne er så liten at en kan se bort fra den.

Eks. La oss anta at den målte istykkelse er Hm hvorav h_1 er stålis, h_2 sammenfrosset vannsørpe og h_3 sammenfrosset snøsørpe. Ved beregningen av isdekkets bæreevne må en derfor bruke istykkelen

$$H = h_1 + 0{,}5\ h_2$$

I praksis bruker man et middeltall av flere målinger i det betraktede område. Delområder med mindre istykkelse bør avgrenses.

Isens temperatur.

Til praktisk bruk for beregning av isens bæreevne må en finne en enkel måte å beregne isens temperatur på grunnlag av luftens temperatur.

For snøfri settes

$$\theta_{is} = \Delta\,\theta_{luft}$$

θ luft representerer den midlere temperatur i de 3 siste døgn. Δ er en koeffisient. For isoverflaten er $\Delta = 1$, for isdekkets midterste skikt er $\Delta = 0{,}5$ og for isens underste lag er $\Delta = 0{,}25$.

For snødekket is innføres Deviks koeffisient

$$\theta_{is} = \Delta\theta_{luft} \cdot a \quad \text{hvor } a = \frac{\lambda_{snø} - h_{is}}{\lambda_{is} \cdot h_{snø} + {}_{snø} \cdot h_{is}}$$

hvor λ er varmeledningsevne og h tykkelse.

I mildværsperiode blir isdekket svekket og da må en innføre en koeffisient $k_1 = 1 - 0{,}05\ n_e$ hvor n_e er antall døgn med positiv temperatur. Isens svekkelse p.g.a. mildvær kan også beregnes etter formelen

$$\sigma_{\text{under mildvær}} = \sigma_{\text{før mildvær}} - k_2 \cdot n_e$$

hvor k_2 etter erfaringer kan settes lik 0,5 kg/cm².

De tillatte spenninger.

For kjøring på is må en sørge for en viss sikkerhet. For beregning av den tillatte spenning innføres derfor en sikkerhetskoeffisient N slik at $\sigma_{maks} = N \cdot \sigma$ tillatt. På empirisk grunnlag er det stilt opp en tabell over de sikkerhetskoeffisienter en bør bruke ved forskjellige iskvaliteter og ved bruk av forskjellige slags kjøretøyer.

Tabell for valg av sikkerhetskoeffisient.

Karakteristikk av overfartssted for tunge kjøretøyer	Isdekkets beskaffenhet: Godt jevnt isdekke	Mindre jevnt isdekke	Mindre tørre sprekker i isen	Større sprekker i isen
For lettere biler ved mindre trafikert overfartssted	1,00	1,20	1,25	1,6
Det samme for tyngre kjøretøyer	1,20	1,50	1,75	2,0
For sterkt trafikerte overfartssted med tunge kjøretøyer	1,50	1,50	1,75	-
Jernbaneoverfart	2,00	2,00	2,00	-

Elastisitetsmodul og Poissonskoeffisient.

I praksis antas elastisitetsmodulen for ferskvannsis $4 \cdot 10^4$ kg/cm² og for sjøis $2 \cdot 10^4$ kg/cm². Poissonskoeffisient settes lik 0,3 for is.

Forfatteren understreker at en må vise særlig stor oppmerksomhet på de meteorologiske forholds innvirkning på isdekket. Hver mildværsperiode svekker isdekket og under langvarig mildvær bør isveien stenges.

Det fundamentelle grunnlag for beregning av isens bæreevne ved bruk av kjøretøyer med små hastigheter og som ikke forårsaker vibrasjoner.

I de fleste tilfelle kan en betrakte kjøring med moderat fart som en kortvarig statisk belastning og benytte formlen enten for sentral eller sylindrisk bøyning avhengig av belastningsflatens dimensjoner.

Hvis isdekket strekker seg over mer enn 50 m, kan det betraktes som en uendelig stor isflate hvilende på et mykt elastisk underlag.

Hvis kjøretøyets lengde er a og bredde b, har en empirisk stillet opp en formel til beregning av en koeffisient A.

$$A = \left(2.35\sqrt{b} + 1,18\,\frac{\sqrt[4]{h^3}}{\sqrt{b}}\right)^2$$

Koeffisienten A er bestemmende om en skal bruke formelen for sentral - eller sylindrisk bøyning.

Hvis $a < A$ benyttes formelen for sentral bøyning
" $a > A$ " " " sylindrisk bøyning

For vanlig kjøretøyer antas i praksis $a = 5,5$ m.

Hvis isens tykkelse er h, den tillatte spenning σ og elastisitetsmodulen E, da er det mulig å beregne den tillatte belastning p.

Ved sentral bøyning er

$$p = \frac{\pi r_o^2 \sigma h^2}{3(1+n)\ell^2 C_2\left(\frac{r}{\ell}\right)}$$

hvor

$$r_o = \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

$$\ell = \sqrt{\frac{E.h^3}{12(1-n^2)}}$$

$$C_2\left(\frac{r_o}{\ell}\right) = 0,4\,\frac{r_o}{\ell}$$

For å lette beregningen benyttes diagram 1 på fig. 6.

Ved sylindrisk bøyning er

$$g_1 = \frac{d\,\sigma\,\sqrt{h}}{a_1 \sin\beta\,(ch\beta - sh\beta)}$$

hvor $a_1 = 1{,}73\sqrt{E}$

$$\beta = 1/2\ d \cdot m = \frac{d}{2\sqrt[4]{\frac{E h^3}{3}}}$$

g_1 angis vanligvis i tonn pr. løpende meter i belastningsbeltet med bredde d. Hele belastningen blir da

$$p = d\ g_1$$

Beregningen kan lettvint utføres ved bruk av diagram 2 på fig. 6.

Beregning av hvor lang tid en last kan stå på isen.

På samme måte som ved beregning av største tillatte belastning, må en her også skille mellom sentral og sylindrisk bøyning.

Ved sentral bøyning er:

$$t = 20\left[\frac{(P_{maks} - P)^2\,(n+1)}{P_{maks} - P}\right]^3$$

hvor t er den tillatte tid i timer,

p er den virkelig vekt,

n er en empirisk koeffisient.

Under mildvær (lufttemperatur over 5 °C) er n = 0 for snøbar is og n = 1 for snødekket is. For snøbar is og lufttemperatur under - 10 °C er n = 2.

Ved sylindrisk bøyning er:

$$t = S\left(\frac{g_{maks}}{g} - 1\right)$$

hvor

$$S = \left(500\ \frac{1 + \theta}{k_0\sqrt{\frac{E}{3}}}\right.$$

θ er luftens temperatur

k_0 er en koeffisient som for ferskvannsis er 15

g er lastens vekt pr. løpende meter.

Praktiske beregningsoppgaver.

Oppgave 1. I 6 døgn har lufttemperaturen vært -15 °C. Barfrost. Hvor tykk is er dannet over stillestående eller langsomt flytende vann?

Til beregningen kan brukes formlene

$$h = \varphi\sqrt{\Sigma(-t)} \qquad \text{eller} \qquad h^2 + h = 11{,}7\ \Sigma(-t)$$

Antas φ = 2,5 på angjeldende sted, gir den første formel

h = ca. 24 cm.

Den andre formelen gir h = ca. 33 cm.

Etter norske forhold synes koeffisienten 11,7 for stor.

Oppgave 2. Luftens temperatur - 20 °C de siste 3 døgn. Beregn isens temperatur når isen er snøbar og når den er snødekket (10 cm tørr snø). Istykkelsen er 75 cm.

For snøfri is er :

$t_{is} = \Delta \cdot t_{luft}$ $\qquad t_{luft}$ er middeltemperaturen de 3 siste døgn.

Δ = 1 for øverste isskikt
Δ = 0,5 " midterste "
Δ = 0,25 for nederste isskikt

For snøfri is er temperaturen i midterste skikt

$$t_{snøfri\ is} = 0{,}5 \cdot (-20) = -10\ ^\circ C$$

For snødekket is brukes formelen

$$t_{is} = \Delta \cdot t_{luft} \cdot a \qquad \text{hvor}$$

$$a = \frac{\lambda_s h_{is}}{\lambda_{is} h_s + \lambda_s h_{is}}$$

Antas λ_s = 0,25 og λ_{is} = 2,0 finnes

$$a = \frac{0{,}25 \cdot 75}{2 \cdot 10 + 0{,}25 \cdot 75} = \text{ca. } 0{,}5$$

og temperaturen i midterste isskikt er

$$t_{is} = 0{,}5 \cdot (-20) \cdot 0{,}5 = -5\ ^\circ C$$

På tilsvarende måte kan en finne temperaturen i øverste og nederste isskikt, og tilslutt finne isens midlere temperatur.

Forbindelsen mellom istykkelse og største tillatte belastning.

I nedenstående tabell gis en oversikt over den minste istykkelse i cm som kreves for å føre en last av forskjellig vekt over isen når lufttemperaturen er - 1 til - 12 °C.

Vekt i tonn	Sikkerhetskoeffisient N				
	1	1,2	1,4	1,6	1,9
0,07	3	-	-	-	-
0,4	9	10	12	14	-
0,6	11	12	14	16	-
1,0	13	14	16	18	-
2,7	16	17	19	21	23
3,5	18	20	22	24	27
6,5	26	29	32	35	40
10,0	32	36	39	42	47
12	34	37	40	43	48
16	34	38	42	46	51
20	41	46	51	55	61
32	52	58	63	69	76
40	59	66	72	78	87
50	65	77	81	88	97
65	77	87	95	108	113

Istykkelse i cm

Tabellen gjelder for stålis. Består isdekket av flere lag av ulike kvaliteter må en først finne den ekvivalente stålistykkelse.

En mildværsperiodes innvirkning på isens styrke kan beregnes av formelen

$$\sigma_{mildvær} = \sigma_{kalt\ vær} - k \cdot n$$ hvor n er antall mildværsdager

og k kan erfaringsmessig settes lik 0,5 kg/cm².

Eks. $n = 6$ $\sigma_{kalt\ vær} = 7$ kg/cm². Da er

$$\sigma_{mildvær} = 7 - 0{,}5 \cdot 6 = 4 \text{ kg/cm}^2$$

Forlanges en sikkerhet f.eks. N = 1,4, blir

$$\sigma_{tillatt} = \frac{\sigma_{mildvær}}{N} = \frac{4}{1{,}4} = 2{,}85 \text{ kg/cm}^2 = 28{,}5 \text{ tonn/m}^2$$

For å finne den nødvendige istykkelse for å føre en last P over isen, kan en bruke diagram 1 eller 2 på fig. 6 ettersom bøyningen betraktes som sentral eller sylindrisk.

Eksempler på isens bæreevne.

1. Analyse av hvorfor brudd inntraff.

a) I november var istykkelsen på en fjordbukt 20 cm. Lufttemperatur -20 °C. Lasten var 3 tonn. Belastningsflatens radius var satt til 1 m.

Etter diagram 1 på fig. 6 finner en at spenningen har vært σ = 10 kg/cm².

Isens midlere temperatur kan en finne av diagram c øverst på fig. 5 har vært -12 °C. Etter diagram a nederst på fig. 5 som gjelder for sjøis med saltholdighet 4-6 °/oo, finner en at den største spenning isen kan tåle, er 9 kg/cm². Dette var antagelig årsaken til bruddet.

En del sprekker i isen kunde være en medvirkende årsak.

b) I desember gikk en last på 22 tonn gjennom isdekket på en lagune. Snødekket is 30 cm tykk. Belastningsradius antas r = 2,2 (b=5,65 og a=3,1) E = 10^5 tonn/m² og n = 0,3

Brukes diagram 1 fig. 6, finner en at spenningen i isen måtte være σ = 23,6 kg/cm². Spenningen σ kan også finnes av formelen

$$p = \frac{\pi r^2 \sigma h^2}{3(1+n)\, \ell^2 C_2\left(\frac{r}{\ell}\right)}$$

Settes isens temperatur til -10 °C finner en av diagram a nederst på fig. 5 at sjøisen tålte bare en spenning på 8 kg/cm². Årsaken til bruddet var at belastningen hadde oversteget den kritiske med det tredobbelte.

c) En last på 25 tonn gikk gjennom snødekket elveis med tykkelse 0,45 m. Anta r = 2,2 m, E = 4 · 10^5 , n = 0,3. Isens temperatur anslås til - 2 °C.

Av diagram 1 fig. 6 finnes at spenningen i isen måtte være σ =13,9 kg/cm². Etter diagram c nederst på fig. 5 tålte isen bare en spenning på ca. 9 kg/cm². Dessuten var det sprekker i isen.

Beregning av hvor stor istykkelsen må være for å kunde tåle tung trafikk.

En traktor med slede skulde trekkes over en elv. Vekten = 40 tonn. Lengden av sledene var 10 m og bredden 2 m. Elvens bredde 300 m.

$t_{is} = -10\ ^{o}C$. $E = 4 \cdot 10^5$ tonn/m², $n = 0,3$.

Sikkerhetsfaktoren $N = 1,5$.

a) Isflaten kan betraktes som uendelig stor. Hadde bredden < 60 m, måtte den vært betraktet som begrenset.

b) Hvis $a < A$ hvor $A = \left(2,35\sqrt{b} + 1,18\ \frac{\sqrt[4]{h^3}}{\sqrt{b}}\right)^2$ skal en benytte formelen for sentral bøyning.

c) Her er $A > 2,35^2 \cdot 2 > 11$ og følgelig $a < A$.
Belastningsradien $r = 1/2\sqrt{a \cdot b} = 2,2$ m.

d) Etter diagram b nederst på fig. 5 finnes at spenningen ikke må overstige 13 kg/cm² = 130 tonn/ m².

e) Av diagram 1 fig. 5 finner en at istykkelsen må minst være h = 63 cm

f) Beregning av hvor lang tid lasten kan stå stille på isen før brudd inntreffer.

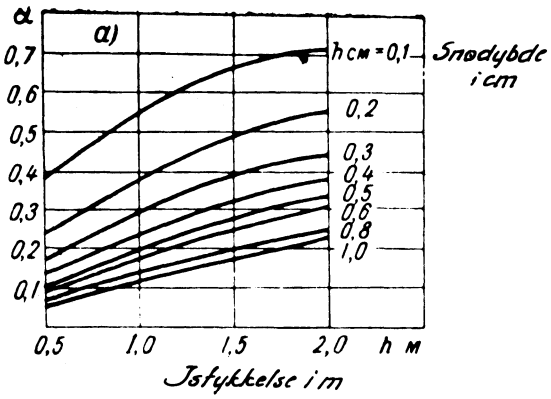
Den største spenning isen tåler er $\sigma = 20$ kg/cm² (N = 1) som ved istykkelse = 63 cm svarer til en belastning P_{max} = ca. 60 tonn.

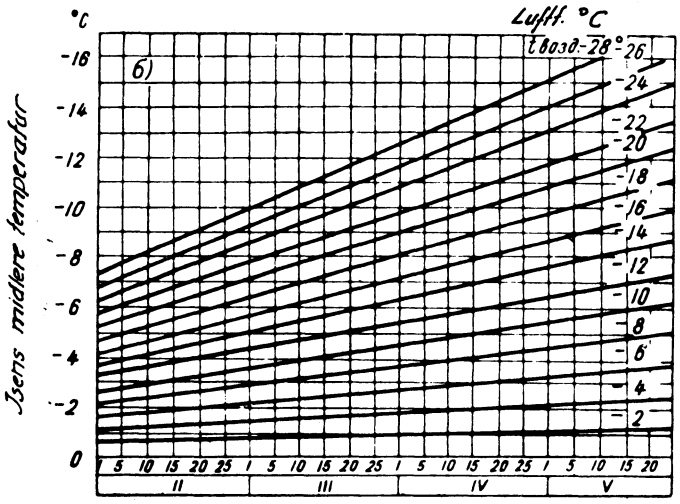
Ved sentral bøyning benyttes formelen

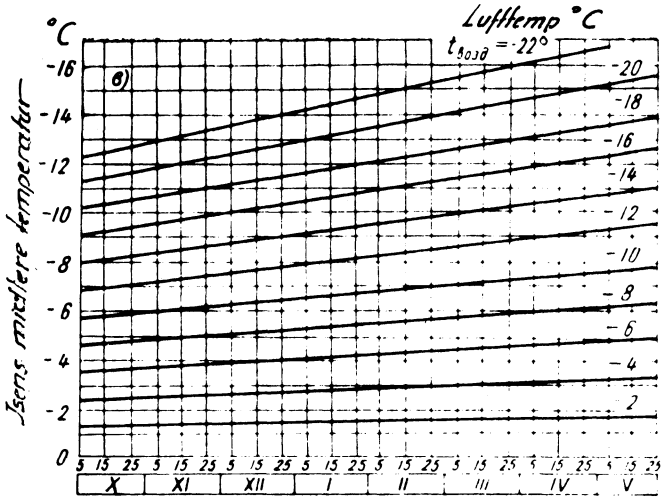
$$t = 20\left[\frac{(P_{maks} - P)^2 (n+1)}{P_{maks} \cdot P}\right]^3$$

For snøbar is og lufttemperatur - 10 °C settes n = 2.

$$t = 20\left[\frac{(60-40)^2(2+1)}{60 \cdot 40}\right]^3 = \underline{2,5 \text{ time.}}$$

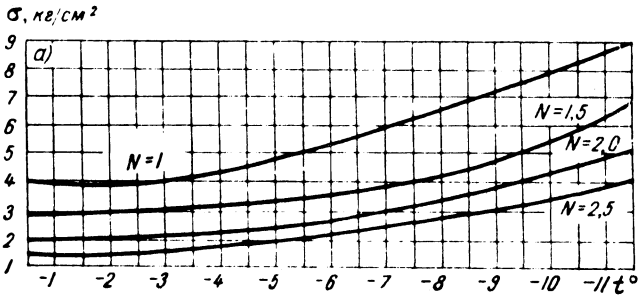




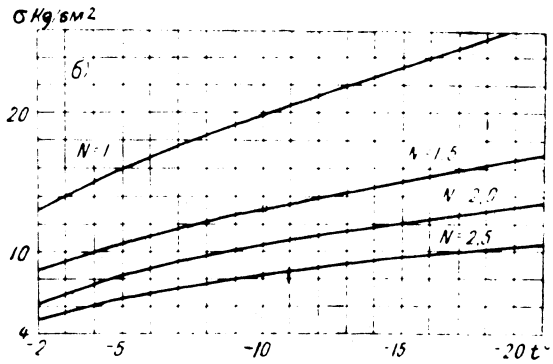


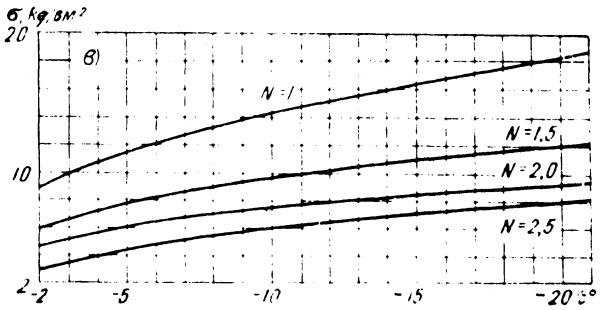
Isdekkets midlere temperatur

Maksimal spenning. Bruddspenning



For sjøis

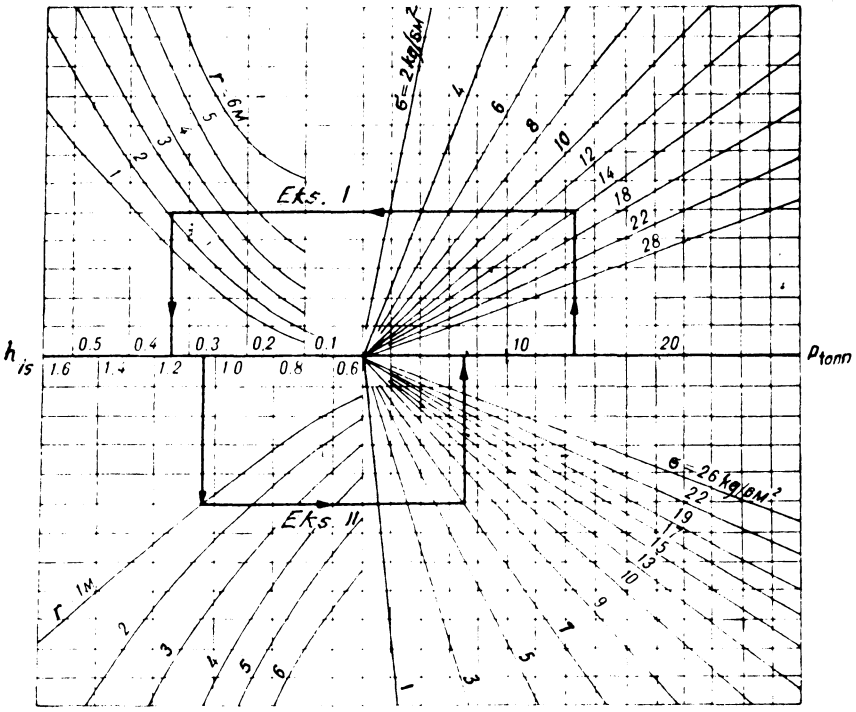




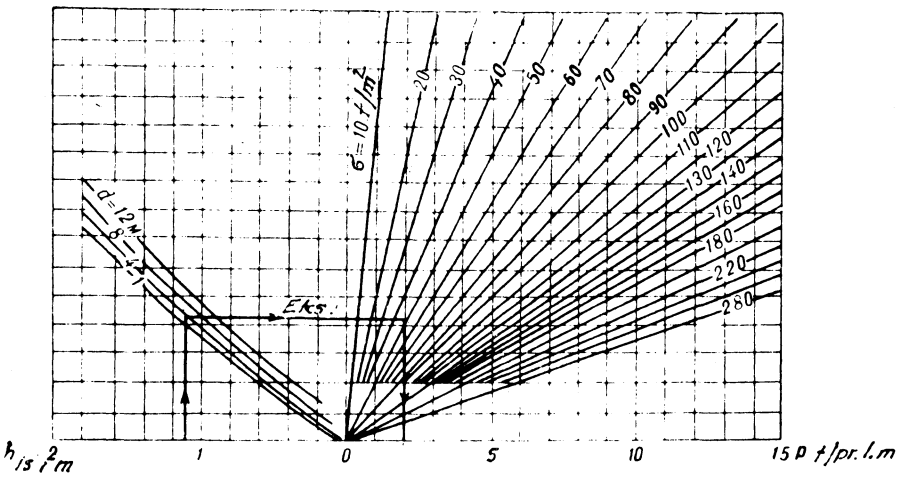
For ferskvannsis

NOMOGRAMMER for BEREGNING av ISENS BÆREEVNE

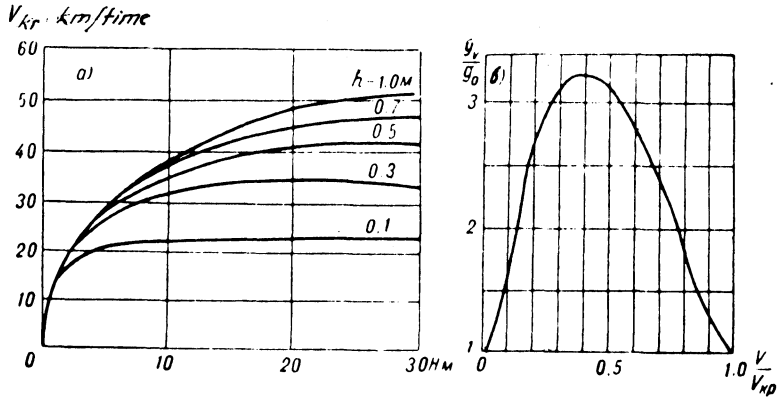
Ved sentral bøyning



Ved sylindrisk bøyning. $E = 4 \cdot 10^5$ tonn/m²



Sammenheng mellom kjørhastighet og bæreevnen



C. Hovedtyper av isveier og mulige forsterkninger av disse .

Forfatteren inndeler overfartsstedene i 3 grupper:

1. Isveier under naturlige forhold.
2. Overfartsteder med overbygg på isen.
3. Jernbanelinjer på isen.

1. Isveier under naturlige forhold.

Disse trenger ingen særlig bearbeidelse bortsett fra at en må sørge for opp- og nedkjørsveier. Først må isveien avmerkes. For å øke istilveksten hurtigst mulig bør snøen fjernes på et gunstig tidspunkt (f.eks. når istykkelsen er ca. 10 cm). Forat veien ikke så fort skal føyke igjen, bør snøen fjernes i et 40-50 m bredt belte. Stigningen på tilkjørselveiene bør ikke overstige ca. 0,1 for hjulkjøretøyer, 0,2 - 0,3 for traktorer og 0,15 - 0,2 for sleder. Forfatteren beskriver nokså grundig hvordan tilkjørselsveier kan forbedres. For tunge kjøretøyer må tilkjørselsveiene forsterkes i minst 15-20 m lengde og i 10-15 m bredde. Forfatteren understreker visere at en må være oppmerksom på sprekkdannelser. Større sprekker (40-50 cm) kan tettes f.eks. ved å plassere isblokker i råken og la disse fryse sammen.

Forfatteren gir i tabeller oversikt over hvor meget bæreevnen tiltar hvis isens tykkelse økes kunstig ved oversprøyting av vann som fryser til.

Prosentvis økning av isdekkets bæreevne ved oversprøyting.

Istykkelse	Økning av istykkelsen i cm									
i cm	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
			Isvei av 2 m bredde							
10	0	29	42							
20	-	0	8	16	25	35				
40	-	-	-	0	2	4	7	9	11	12
60	-	-	-	-	-	0	2	3	4	5
			Isvei av 4 m bredde							
10	0	24	52	-	-	-	-	-	-	-
20	-	0	10	21	33	46	-	-	-	-
40	-	-	-	0	4	8	12	17	22	27
60	-	-	-	-	-	0	3	5	8	10
			Isvei av 8 m bredde							
20	-	0	8	19	31	47	-	-	-	-
40	-	-	-	0	7	12	19	25	31	35
60	-	-	-	-	-	0	4	7	10	13

Forfatteren gir en del erfaringsmessige råd for slik forsterkning av ferskvannsis.

a. Snøen fjernes før sprøyting for å unngå at det dannes svakere skikt i isen.

b. Det sprøytes på bare 0,5 - 1 cm vann om gangen.

c. En effektiv forsterkning fås på følgende måte:
Is som er oppdelt i smådeler (som kult) legges på isveien i et lag på 10-15 cm (under særlige gunstige meteorologiske forhold i enda tykkere lag), oversprøytes med vann og fryses sammen.

d. Vanligvis har den kunstigt lagede is mindre bæreevne enn stålis, bare ca. halvparten.

e. Sjøvann må ikke brukes til forsterkning av is.

2. Isveier med overbygg.

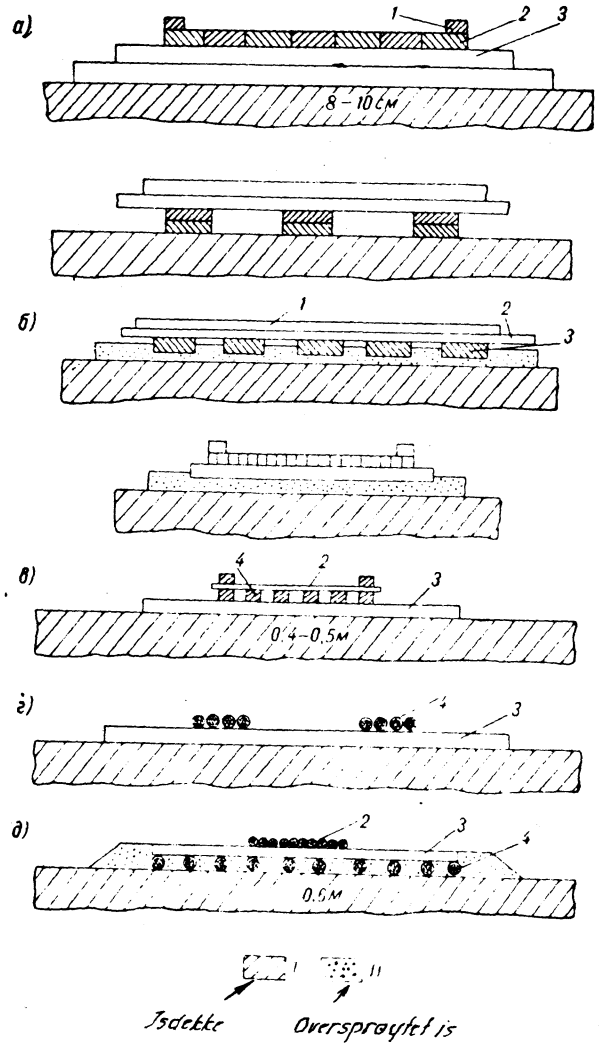
Hensikten med overbygg er å forsterke isens bæreevne, særlig tidlig på vinteren mens isen er forholdsvis tynn. Overbygningens konstruksjon avhenger av trafikkens størrelse og av hvad slags kjøretøyer som benyttes. Slike konstruksjoner kan forsterke is som er 20 cm tykk med ca. 15 %, men hvis istykkelsen er 40 cm med bare ca. 8 %. Det er bare i den første tiden slike overbygg tjener til å forsterke isen, senere bare til å beskytte isens overflate.
På fig. 7 viser forfatteren forskjellige typer av overbygg på sterkt trafikerte isveier. Han angir også formler til å beregne konstruksjonenes dimensjoner og hvor stor forsterkningen av isveiene blir.

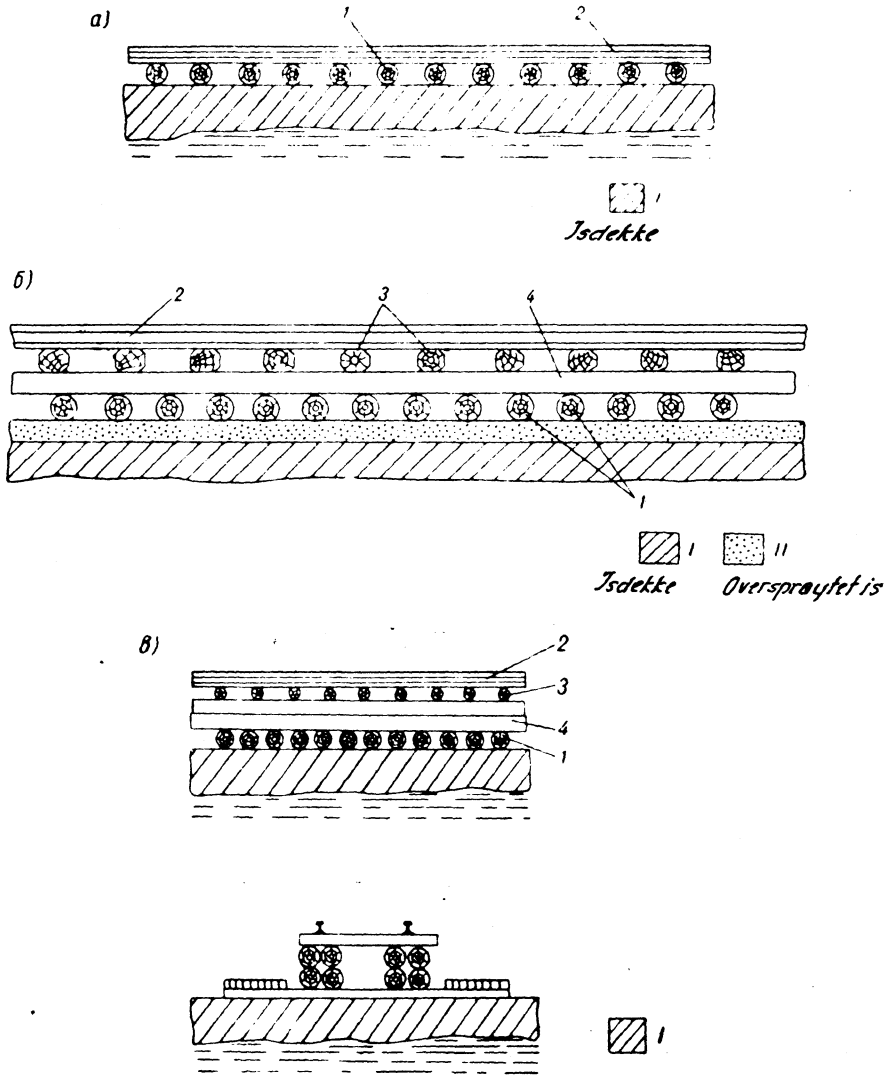
Overbygningens bredde bør ikke overstige 5 m. Større bredde vil ikke ha noen betydning. Forfatteren bemerker at overbygg på isveier bare bør brukes når det ikke lar seg gjøre å forsterke isen tilstrekkelig på andre måter. Ved utformingen av overbygg må en ta hensyn til eventuelle vannstandsvariasjoner og til isens utvidelse ved temperaturforandring.

Jernbanelinjer på isen.

Forfatteren gir en rekke konstruksjoner for underlag til jernbanespor og for til- og avkjørselsinnretninger. Se fig. 7 og 8. Han gir videre detaljert beskrivelse av disse.

Overbygg av tre på isveger

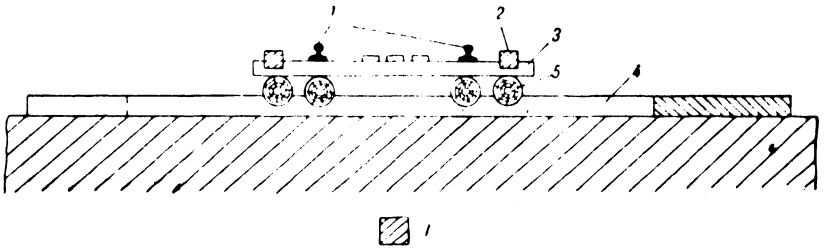




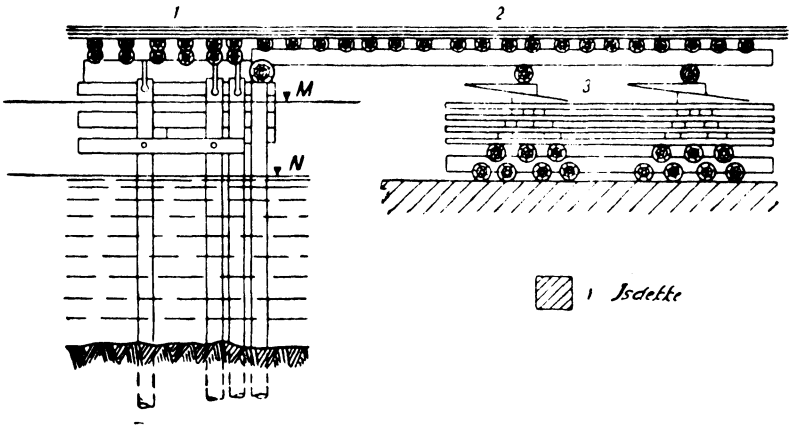
Underlag for jernbane over isen

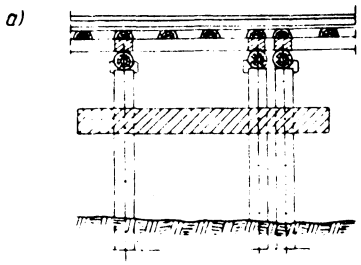
Fig 7

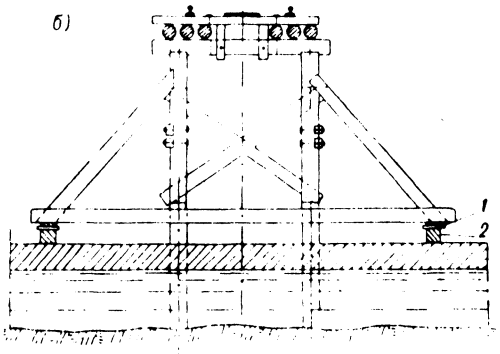
Enkelt underlag for jernbane over isen



Konstruksjoner for til- og avkjørsel







VEDLEGG

NOMOGRAMMER til PRAKTISK BRUK for BEREGNING av ISENS TILVEKST og TEMPERATUR

Utarbeidet av J. P. Doronin

Statens Hydrometeorologisk Institutt

Isproblemer i Arktiske områder

B. 267

Moskva, 1964.

BEREGNING av ISENS TILVEKST og AVSMELTNING

Fig. 1-5

Følgende formel er benyttet:

$$H = -W + \sqrt{(H_0 + W)^2 + \frac{2\lambda}{L^x \rho}\left\{\int_0^t \left[\theta - \delta\vartheta - \frac{R}{m} - \phi\left(\frac{1}{m} + \frac{H_0}{\lambda}\right) + \beta\right] d\tau + \int_0^t H w \frac{\partial T_0}{\partial \tau} d\tau\right\}}$$

Her H, λ, L, ρ - isens tykkelse, varmeledning, latent varme og tetthet

ϑ, r - lufttemperatur og luft. rel. fuktighet i z m høyde over isen.

T_0, θ - temperatur av isens øverste og underste sjikt

R - strålings-balanse over isens resp. snøens overflate

ϕ - varmetilførselen til is fra vannet.

$$L^x = L\left\{1 - \frac{c(T_0 - \theta)}{3L} - \frac{f(s)\lambda}{L\rho(T_0 - \theta)}\left[1 + \frac{T_0}{\theta} - \frac{2T_0}{T_0 - \theta}\ln\frac{T_0}{\theta}\right]\right\}$$

$$W = \frac{\lambda}{m} + \frac{1}{L^* \rho f}\int_0^t \phi \xi \, d\xi; \quad m = b\left(1 + 0{,}622\frac{\ell E \alpha \eta}{c_p B}\right);$$

$$\delta = \frac{c_p B + 0.622\,\ell E r \alpha \eta}{c_p B + 0.622\,\ell E \alpha \eta}; \quad \beta = \frac{0.622\,\ell E (1 - r)\xi}{c_p B + 0.622\,\ell E \alpha \eta};$$

$$w = \frac{\lambda}{m}\left[\frac{1}{2k} + \frac{f(s)}{(T_0 - \theta)^2}\left(\ln\frac{T_0}{\theta} + \frac{\theta}{T_0} - 1\right)\right] + \frac{H}{6k} + \frac{H f(s)}{(T_0 - \theta)^2}\left[\frac{T_0 + \theta}{T_0 - \theta}\ln\frac{T_0}{\theta} - 2\right];$$

$$f(s) = \frac{\alpha L \rho s}{\lambda}; \quad \alpha = 50^\circ \quad H_0 = H\big|_{t=0};$$

$$q = 0.622\frac{rE}{B}e^{\alpha\vartheta} \approx 0.622\frac{rE}{B}(\xi + \alpha\eta\vartheta); \quad b \approx (0{,}4 + 0{,}48u)\cdot 10^{-4}$$

Her u - målt vindhastighet m/s

ℓ - fordampnings-varme

E - dampens metningstrykk ved 0°C

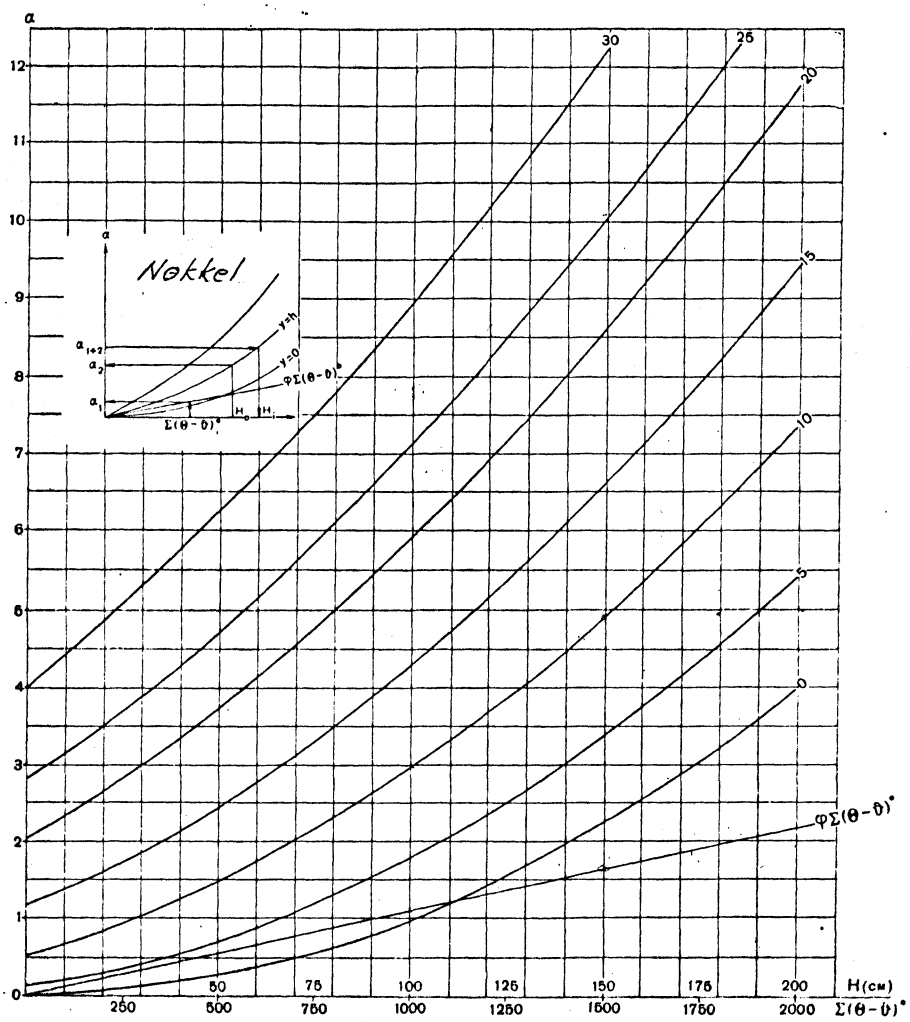
B, c_p - lufttrykk og luftens varmekapasitet

q - luft. rel. fuktighet

c, k - isens varmekapasitet og temperaturledningsevne

s - isens saltholdighet

1. Nomogram til beregning av istilvekst for sjøis



y – snødybde i cm, H – istykkelse i cm, $\Sigma(\theta-\vartheta)$ frostmengde

I nomogrammet er antatt $\Phi = 0$

$$H = -\left(\frac{\Phi}{L^{x}\rho} + \frac{\lambda}{\lambda_1} y\right) + \sqrt{\left(\frac{\Phi}{L^{x}\rho} + \frac{\lambda}{\lambda_1} y + H_0\right)^2 + \frac{2\lambda}{L^{x}\rho}\int_0^{t}\left[\theta - \vartheta - \frac{\Phi}{\lambda}\left(H_0 + \frac{\lambda}{\lambda_1} y\right)\right] d\tau}$$

$$L^{x} = L\left\{1 - \frac{c(T_0-\theta)}{3L} - \frac{f(s)\lambda}{L\rho(T_0-\theta)}\left[1 + \frac{T_0}{\theta} - \frac{2T_0}{T_0-\theta}\ln\frac{T_0}{\theta}\right]\right\}$$

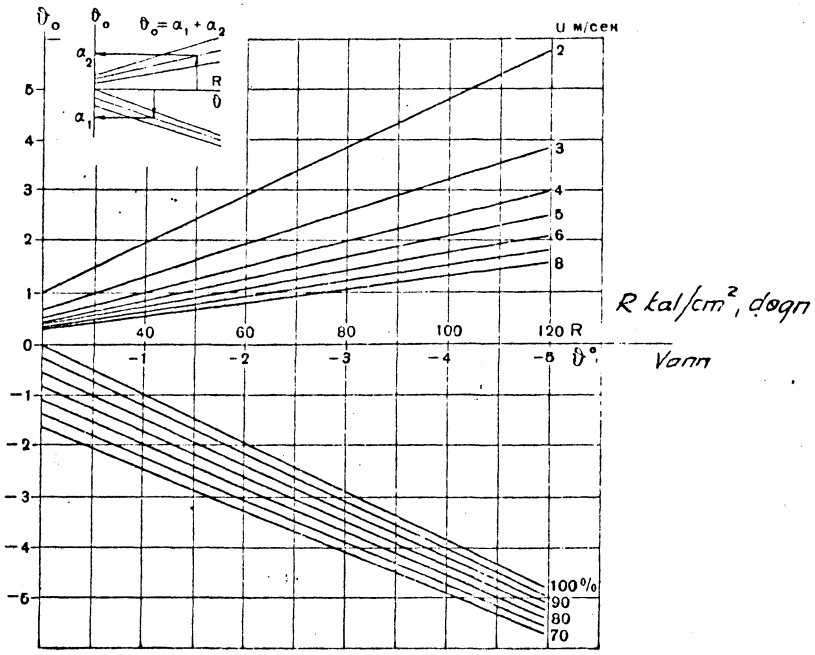
Det er antatt at isens saltholdighet er ca. 5‰ og snøens varmeledningsevne λ er: for nysnø inntil 10 cm $= 6.10^{-4}$, 10-25 cm $= 7.10^{-4}$ og hvis snølaget er over 25 cm – $7{,}5.10^{-4}$

Talleksempel: $\Sigma(\theta-\vartheta) = 1500$, etter nomogrammet $\alpha_1 = 1.7$

$H_0 = 100$ cm og $h_s = 10$ cm, av nom. $\alpha_2 = 3{,}0$

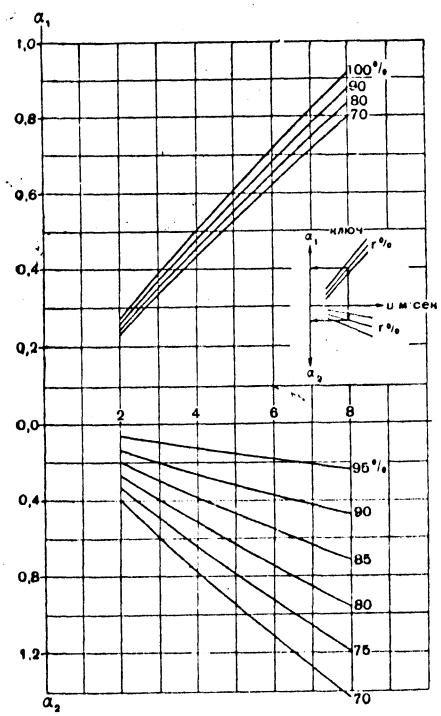
$\alpha_1 + \alpha_2 = 4.7$ og $H = 145$ cm. (se nøkkel)

2. Nomogram til beregning av snooverflatens temperatur

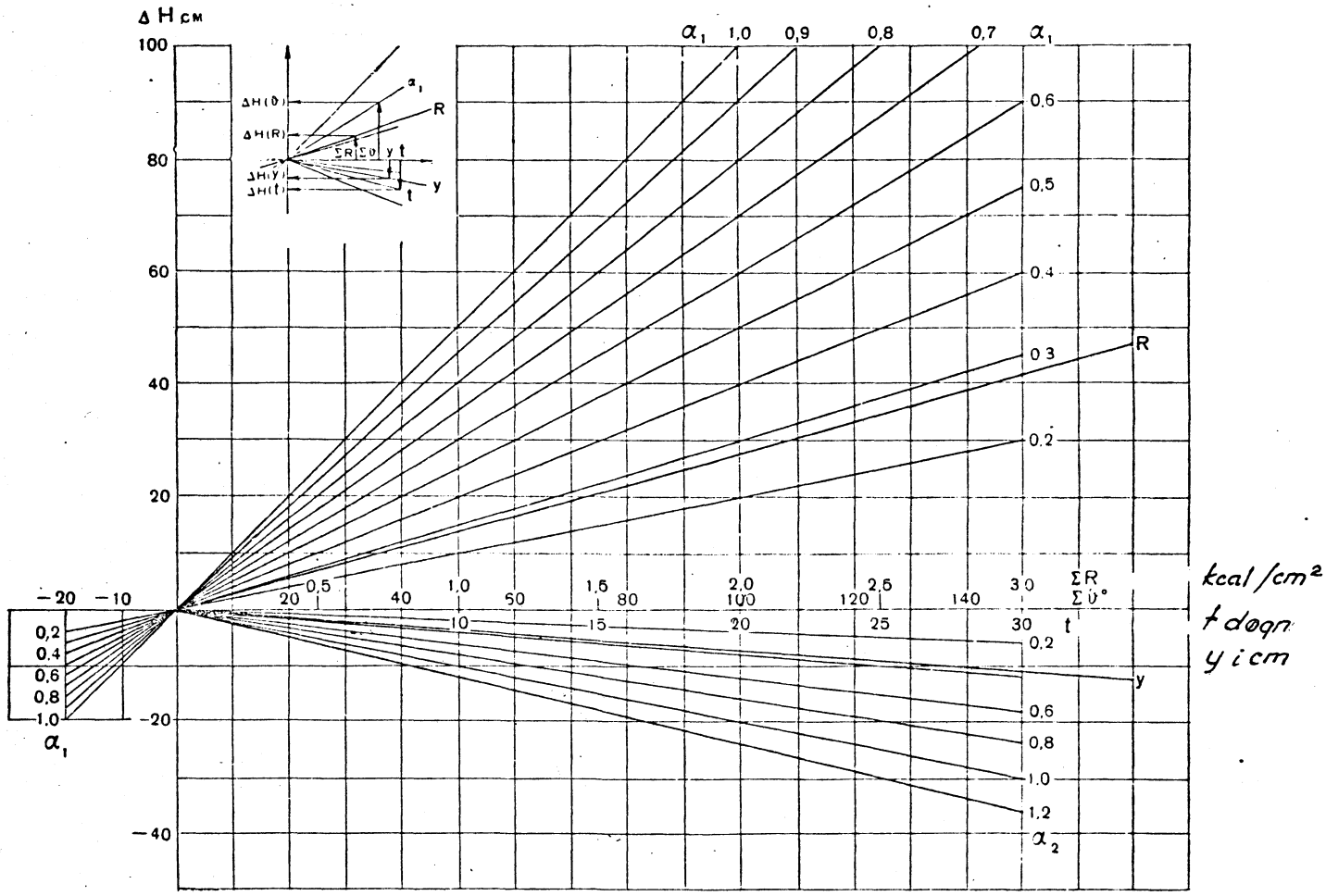


$$\vartheta_0 \approx \frac{0.058}{b \cdot 10^4} R + (0{,}5 + 0{,}46r)\vartheta - 5{,}35(1-r)$$

3. Beregning av α verdi



4. Nomogram til beregning av isens avsmelting



$$\Delta H = \Delta H(R) + \Delta H(\vartheta) + \Delta H(t) + \Delta H(y)$$

$$\Delta H = 1{,}39 \cdot 10^{-2} \sum_1^N R_i + 0{,}12 \sum_1^N (1 + 0{,}81\, r_i)\, b_i \vartheta_i - 1{,}13 \sum_1^N (1 - r_i)\, b_i - y \frac{\rho_1}{\rho}$$

Bruk av nomogram 3 og 4:

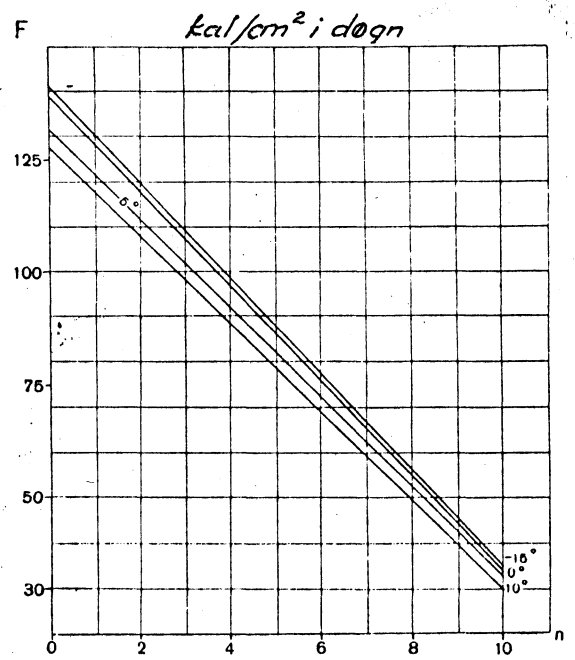
Først må beregnes α_1 og α_2 etter gitt vindhastighet u og luftens rel. fukt. r. Etterpå med hjelp av nom. 4 kan en beregne avsmeltingen ΔH i et tidsrom av t døgn.

$$\Delta H = \Delta H(R) + \Delta H(\vartheta) + \Delta H(t) + \Delta H(y)$$

Hvis $\rho_1 = 0.35$ og $\rho = 0.90$, så $y = \frac{\rho_1}{\rho} = 0.39\, y$ i cm

Strålings-balansen kan beregnes: $R = Q(1-A) + F$, hvor Q er total innstråling på hor. pl. A er albedo og F er effektiv utstråling.

5. Beregning av effektiv utstråling



n – skydekke 1–10

$$F = \sigma U^4 (\zeta - \mu\sqrt{e})(1 - \nu n)$$

Her er: σ – Stefan-Boltzmann's koeffisient $= 0{,}826 \cdot 10^{-10}$

U – Lufttemp. grad kelvin °K

e – Luftens fuktighet i mb.

$\zeta, \mu, \nu,$ – Empiriske parametre

Nomogram er konstruert for parametrenes middelverdier

BEREGNING av ISENS MIDDELTEMPERATUR

Fig. 6-10

Sammenhengen mellom isens midlere temperatur og lufttemperatur

$$\bar{T} = \frac{\theta}{2} + \theta_0\left[\frac{1}{2} - g(t)\right] + \int_0^t \vartheta(t-\xi)\,dg$$

Hvor $\theta_0 = T\big|_{\substack{z=0\\t=0}} \approx \vartheta\big|_{t=0}$; $g(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum \frac{\text{eksp.}(-4\nu_i^2 kt)}{(2i-1)^2}$

$$\nu_i = \frac{\pi(2i-1)}{2H};$$

Tilnærmete formler

For snøfri is : $\bar{T} \approx \frac{\theta}{2} + \frac{4}{\pi^2}\theta_0 e^{-4\nu_i^2 kt} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{N}\bar{\vartheta}_j\left[e^{-4k\nu_1^2(t-t_j)} - e^{-4k\nu_1^2(t-t_j-1)}\right]$

For snødekket is :

$$\bar{T} \approx \frac{1}{2\left(1+\frac{\lambda_4}{\lambda_1 H}\right)}\left\{\theta\left(1+2\frac{\lambda_4}{\lambda_1 H}\right) + \theta_0 e^{-\varkappa k\nu_1^2 t} + \sum_{j=1}^{N}\bar{\vartheta}_j\left[e^{-\varkappa k\nu_1^2(t-t_j)} - e^{-\varkappa k\nu_1^2(t-t_j-1)}\right]\right\}$$

Hvor $\varkappa = 1 + \frac{\lambda_1 H}{\lambda_4}$ (Se fig 6).

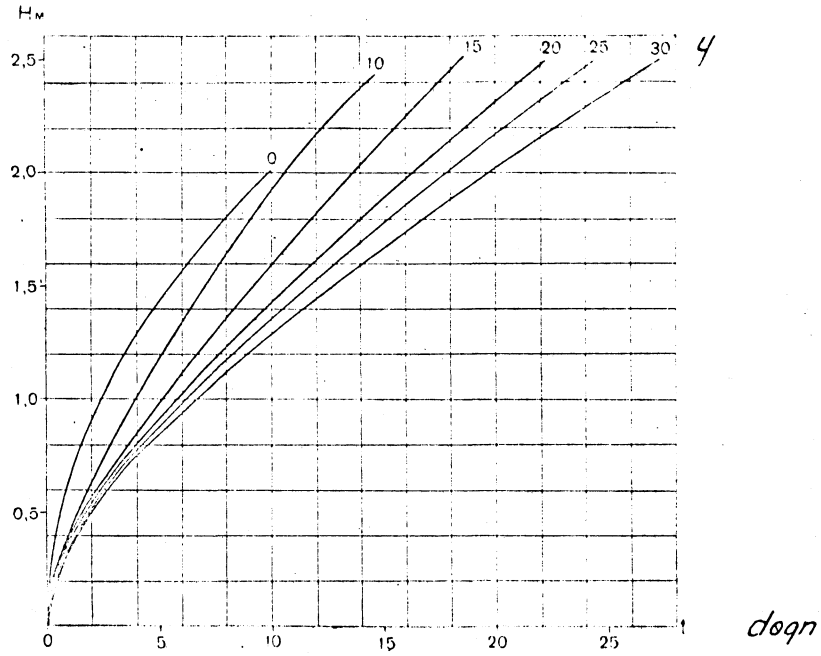
Under stabile vinterforhold og snøfri is :

$$\bar{T} = \frac{\theta}{2} + \frac{4}{\pi^2}\bar{\vartheta};$$

Snødekket is :

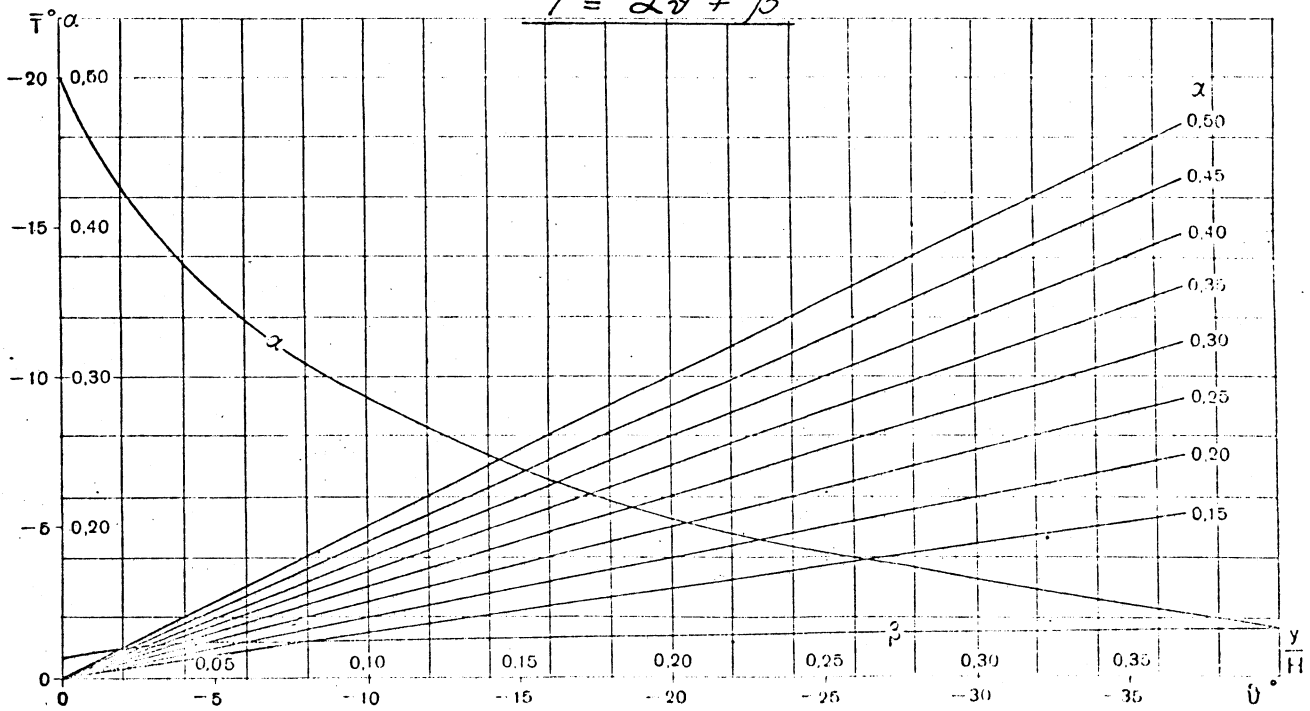
$$\bar{T} \approx \frac{\bar{\vartheta} + \theta\left(1+2\frac{\lambda_4}{\lambda_1 H}\right)}{2\left(1+\frac{\lambda_4}{\lambda_1 H}\right)}$$ (Se fig. 7)

6. Beregning av tidsintervall fra H og y



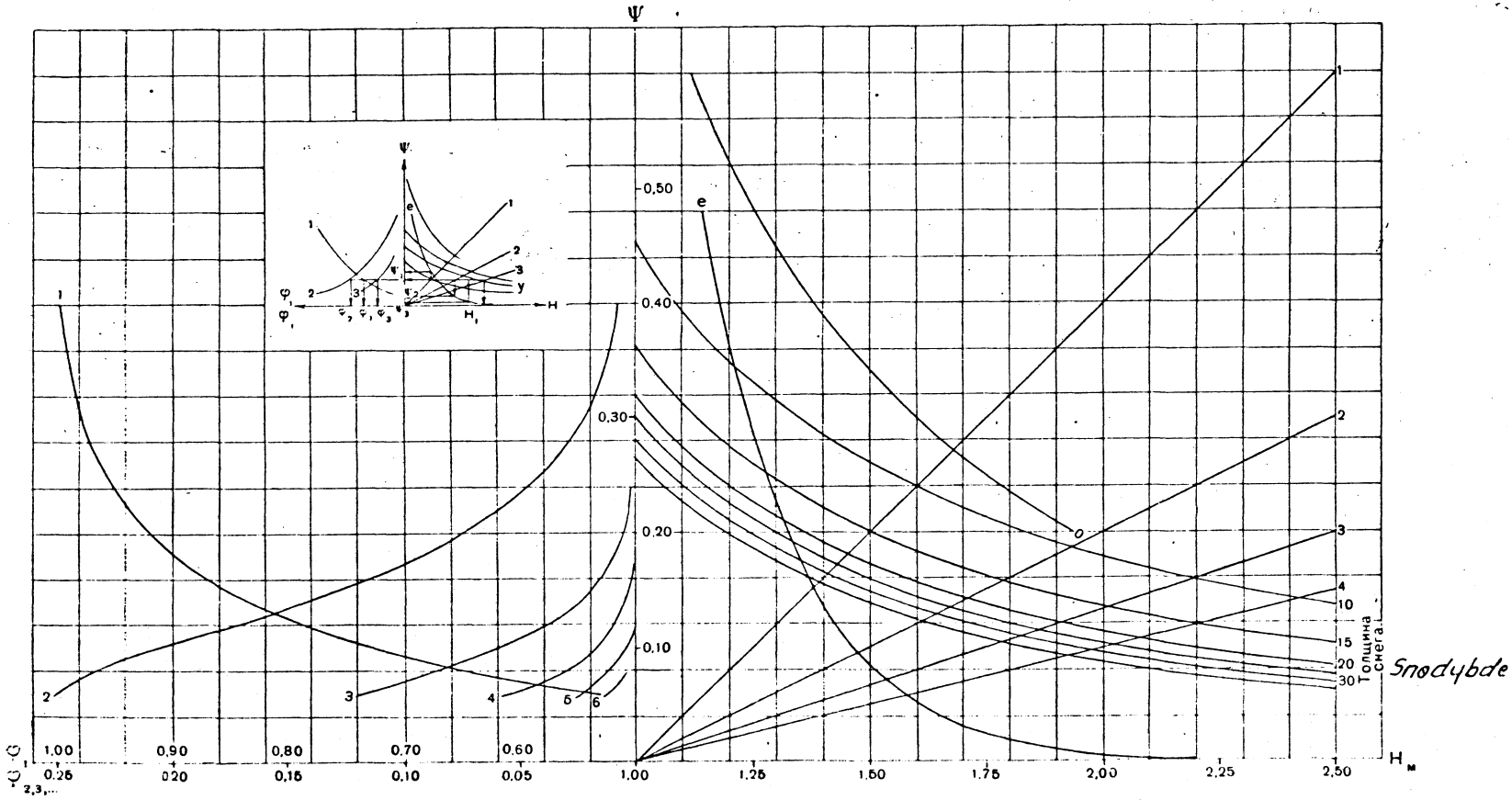
7. Nomogram til beregning av isens middeltemperatur i høst-vinter periode

$$\bar{T} = \alpha \bar{\vartheta} + \beta$$

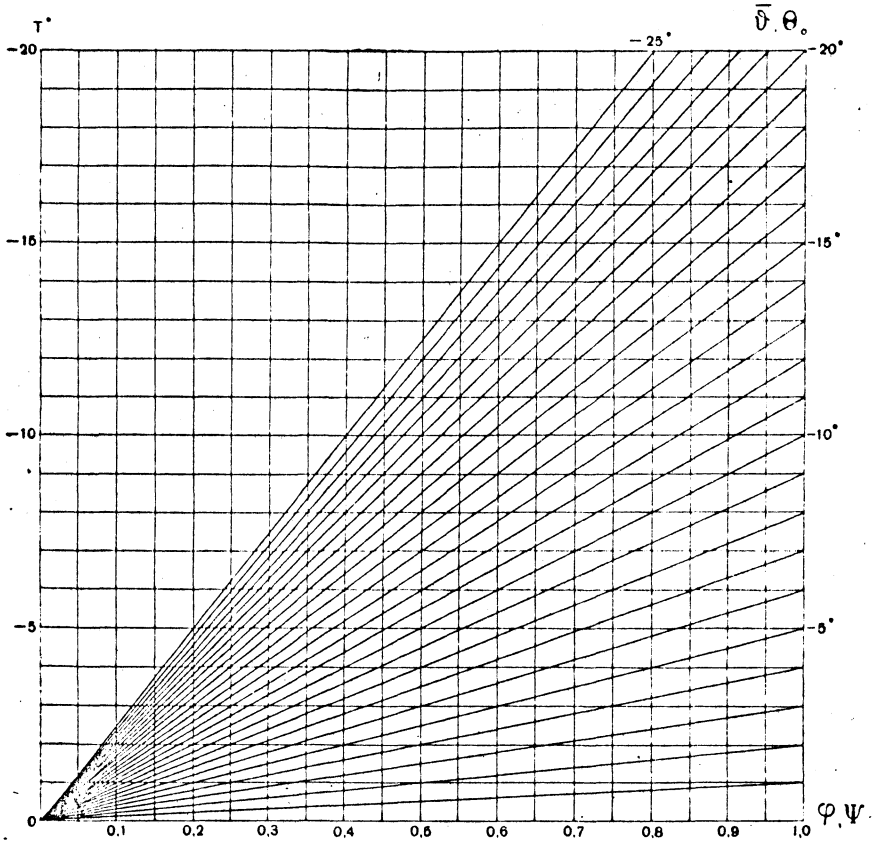


Bruk av nom 6. og 7: Hvis $\frac{y}{H}$ er gitt kan en av (7) lese av α og $\bar{T}(\beta)$
Etterpå etter $\bar{\vartheta}$ og av (6) avlest tidsintervall kan en finne $\bar{T}(\alpha)$
Sum av $\bar{T}(\alpha)$ og $\bar{T}(\beta)$ gir isens midl. temperatur

8. Nomogram for beregning av φ og ψ verdier



9. Nomogram for beregning av isens temperatur T



Talleksempel: $H = 2\,m$ og 15 cm snø på isen. Skal beregne isens midlere temperatur den 10., 20. og 30. mai. Midlere lufttemp. har vært henholdsvis $-14, -10, -7\,°C$ og midl. temp. i 30. apr. $= -20\,°C$.

Fig. 8 venstre side gir: $\varphi_1 = 0{,}816$, $\varphi_2 = 0.150$ og $\varphi_3 = 0{,}028$

Disse koeffisientene karakteriserer lufttemp. rolle i de tidligere dekader

Videre **må en** beregne ψ (temperatur-forråd). Fra fig. 8 høyre side kan en finne tilsvarende $\psi_1 = 0.184$, $\psi_2 = 0{,}032$, $\psi_3 = 0{,}005$. Fig. 6 kan gi temperatur-forråd i isen ved midlere lufttemp. θ_0 i en viss periode, i dette tilfelle 14 døgn.

Ved hjelp av fig. 9 for $\bar{\vartheta} = -14°$ og $\varphi_1 = 0{,}816$ fåes $T_{\varphi_1} = -11.4\,°C$

For $\theta_0 = -20\,°C$ og $\psi_1 = 0{,}184$ er $T(\psi_1) = -3.7\,°C$.

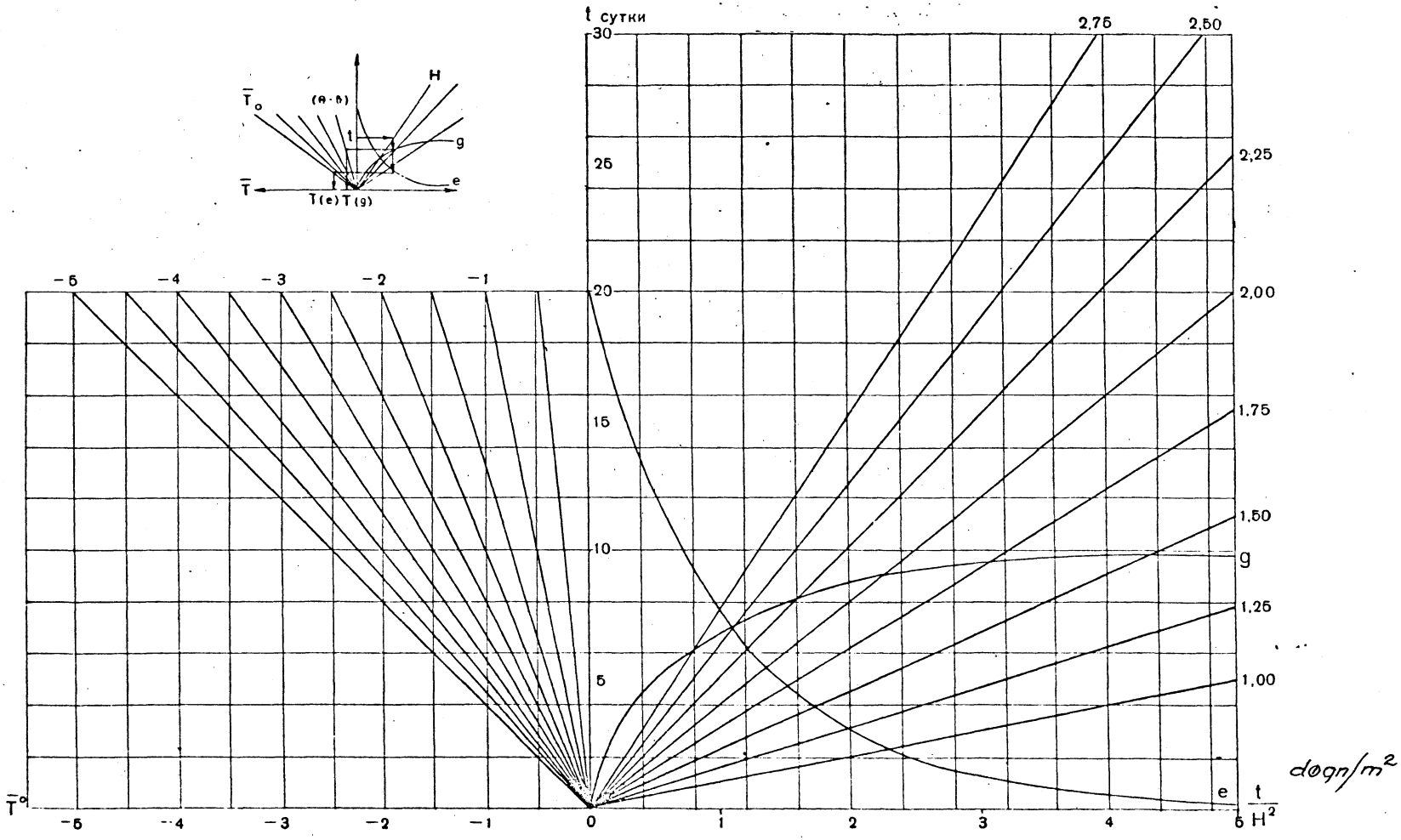
$$T_{10.\,mai} = T(\varphi_1) + T(\psi_1) = -15.1\,°C$$

På liknende måte kan en beregne

$$T_{20.\,mai} = T(\varphi_1) + T(\varphi_2) + T(\psi_2) = -10{,}9\,°C$$

$$T_{30.\,mai} = T(\varphi_1) + T(\varphi_2) + T(\varphi_3) + T(\psi_3) = -8{,}0\,°C$$

Nomogram til beregning av isens midlere temperatur i avsmeltings-perioden.



$$T = T_0 e^{-4k\nu_1^2 t} + (\theta - \delta)\, q(t)$$