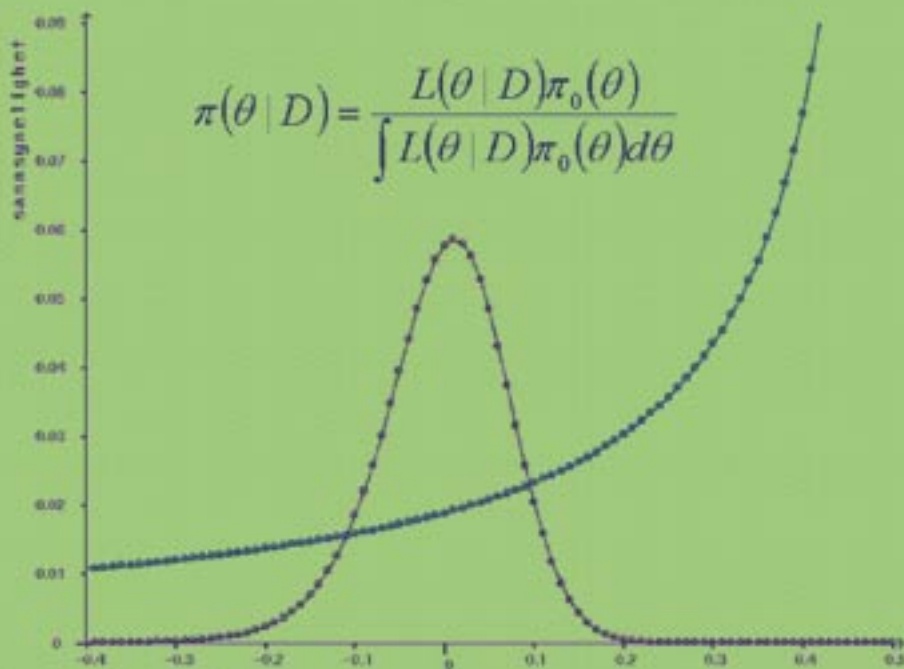


Evaluering av Homogenitet i Hydrologiske Tidsserier ved hjelp av Bayesiansk Regresjon

Trond Reitan,
Asgeir Petersen-Øverleir

5
2005



Evaluering av Homogenitet i Hydrologiske Tidsserier ved hjelp av Bayesiansk Regresjon

Rapport nr 5-05

Evaluering av Homogenitet i Hydrologiske Tidsserier ved hjelp av Bayesiansk Regresjon

Utgitt av: Norges vassdrags- og energidirektorat

Redaktør:

Forfatter: Trond Reitan og Asgeir Petersen-Øverleir

Trykk: NVEs hustrykkeri

Opplag: 100

Forsidefoto:

ISSN 1501-2832

ISBN 82-410-0533-4

Emneord: Homogenitet, Hydrologiske tidsserier, Bayesiansk regresjon

Norges vassdrags- og energidirektorat
Middelthunsgate 29
Postboks 5091 Majorstua
0301 OSLO

Telefon: 22 95 95 95
Telefaks: 22 95 90 00
Internett: www.nve.no

Juni 2004

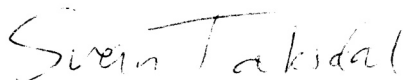
Innhold

Forord	4
Sammendrag	5
1 Introduksjon.....	6
2 Bayesiansk statistikk	7
2.1 En introduksjon til bayesiansk statistikk	7
2.2 Bayesiansk lineær regresjon	8
2.3 Modellvalg, Occhams barberblad og regresjon med ikke-lineære bidrag 9	
2.4 Bayesiansk modell- og responsestimering.....	10
2.5 Et enkelt eksempel.....	11
3 Bruk av Bayesiansk regresjon for å undersøke homogenitet	13
3.1 Modellene selv og praktiske hensyn	13
3.2 A priori fordelingene	15
3.3 Kalkulasjon og visning av a posteriori sannsynlighet for modeller og modellparametere.....	16
3.4 Vanlig bruk av <i>check homogeneity</i>	17
3.5 Tolkning av ulike ikke-homogene resultater	17
4 Eksempler på bruk	19
4.1 Homogenitet.....	19
4.2 Lineær modell	20
4.3 Ettsprangs-modell	21
4.4 Kvadratisk trend	23
4.5 Tosprang-modell	24
5 Litt risikoanalyse	25
6 Mulige utvidelser	26
7 Konklusjon	26
8 Takk	26
9 Referanser	27

Forord

Kontroll av hydrologiske tidsserier er en essensiell del i kvalitetssikringen av den hydrologiske produksjonslinjen på NVE. For å realisere dette er det viktig med fleksible og brukervennlige dataverktøy basert på moderne statistiske metoder. Frem til 2004 manglet NVE et skikkelig verktøy for å sjekke homogenitet i en enkelt tidsserie uten bruk av en eller flere sammenligningsserier. For å bøte på dette ble programmet *check homogeneity* utarbeidet. Utviklingen av dette dataprogrammet ble finansiert av NVEs midler for forskning og utvikling.

Oslo, januar 2005



Svein Taksdal
avdelingsdirektør

Sammendrag

Bayesiansk regresjonsmetodikk blir i denne rapporten forsøkt brukt til å analysere langtidshomogenitet i tidsserier av vannføring. Programmet *check homogeneity*, som er basert på en slik metodikk, ble implementert og testet. Rapporteringen, og dermed også analysen, ble bygd opp på en slik måte at det skal være enkelt for en hydrolog å kunne ta en avgjørelse knyttet til homogeniteten til en serie basert på rapportresultatene. Avgjørelsen baserer seg normal på vurdering av homogenitet versus ikke-homogeniteter som: (1) glidende langtidstrend; eller (2) sprang modeller for beskrivelse av tidsserien. Data blir hentet inn på årsbasis og sannsynligheter for de ulike modellene blir rapportert. I de fleste kjøringene programmet har blitt testet på, har modellen programmet har ansett som mest sannsynlig vært en modell som ved visuell inspeksjon av data har sett ut til å være et rimelig modellvalg. En del eksempler blir gitt til sist. Det konkluderes med at metodikken fungerer godt og kan tenkes brukt også i andre hydrologiske sammenhenger.

1 Introduksjon

Dette dokumentet inneholder tankegangen bak programmet *check homogeneity* (heretter kalt CH). Tradisjonelt har DMASS (double-mass) analyse (L. Roald, 1981; WMO, 1994) vært mye benyttet for å teste homogeniteten til hydrologiske tidsserier. CH er ment som et alternativ til DMASS analyser.

Tanken bak å lage et nytt program for homogenitetstesting på hydrologiske data var å teste hvor godt bayesiansk regresjon passet til et program som dette. Det rådende programmet (DMASS) tester kun frekvenstetisk om det er sprang i forholdet mellom en tidsserie og en annen. Det er flere innvendinger man kan ha til en slik metodikk. For det første krever det en sammenligningsserie som man skal føle seg sikker på er homogen. For det andre er det slettes ikke sikkert at de som skal undersøke en tidsserie og foreta beslutningen om den er homogen eller ikke, kan forstå en rapport fra en frekventistisk test. Dermed blir bare de maskinelle valgene for signifikans/ikke-signifikans brukt, noe som betyr at hydrologens egne erfaringer omkring serien ikke kan benyttes. Dette i seg selv ansporet til bayesiansk analyse som rapporterer sannsynligheter (noe de fleste har et forhold til) hellers enn p-verdier. Videre var det av interesse at bayesiansk regresjon hadde regelen om sparsommelighet i modellene (“Oicchams barberblad”) innebygd. Dette lovet godt for en modellfamilie der homogen modell (en statistisk modell med kun en middelvei og standardavvik) kunne sammenlignes med mer kompliserte modeller. Med bayesianske regresjons modeller er det enkelt å benytte flere ulike modeller, også modeller med glidende i stedet for brå forandringer. Dermed kunne det tenkes at et program med bayesiansk regresjon kunne fange opp flere ikke-homogeniteter enn det en DMASS-analyse kan. Til sist, de ikke-homogene modellene som tas med kan, i tillegg til å være noenlunde utfyllende, også være enkle for en hydrolog å fortolke.

I programmet henter man først en årlig statistikk fra en tidsserie; eksempelvis median, maksima, minima, etc. Det antas at en slik tidsrekke ikke har noen auto-korrelasjon, det vil f.eks. si at kjennskap til årets midlere vannføring ikke gir noen innsikt i neste års midlere vannføring. I ikke-homogene modeller trenger tidsrekka dog ikke være stasjonær, det vil si at forventet årlig verdi kan avhenge av året. For å kunne betrakte ikke-stasjonaritet, må modeller som beskriver slikt eksistere som alternativ til en modell som er stasjonær (homogen). Vi benytter oss her av fire ulike ikke-stasjonære modeller samt en stasjonær og oppdaterer sannsynlighetene bayesiansk for de ulike modellene ut i fra data.

Rapporten er delt inn i fire. Etter introduksjonen følger en beskrivelse av bayesiansk statistikk med spesielt blikk på regresjonsmodeller. Dette kan hoppes over for de som kan dette eller er mer interessert i programmets spesifikke virkemåte. Deretter følger et kapittel om den spesifikke anvendelsen av teorien som ble benyttet i dette programmet samt beskrivelse av grensesnitt, før en kommer til et kapittel omhandlende resultater fra testeksempler.

2 Bayesiansk statistikk

2.1 En introduksjon til bayesiansk statistikk

I bayesiansk statistikk beveger man seg mellom å la data anses som stokastiske (tilfeldige) gitt modellen og å anse modellen som stokastisk gitt data. Dette blir gjort ved å benytte seg av Bayes formel, som i bunn og grunn er å gå fra en betinget sannsynlighet til en annen;

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B | A)P(A)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)} \quad (1)$$

der A_i betyr et komplett sett disjunkte utfall som inneholder A .

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$
- $P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1$
- $A = A_k$ for en eller annen indeks k

Merk at summen må erstattes med et integral for kontinuerlige utfall.

Denne formelen blir interessant når man benytter den til å oppdatere ens usikkerhet hva gjelder modellparametere (eller for den saks skyld modeller og modellgrupper). Man har normalt en frekventistisk modell for data gitt modell og modellparametere. En kan dermed oppdatere sannsynlighetsfordelingen til modellparametrene θ . Vi vil anse disse modellparametrene θ som stokastiske med en initial distribusjon beskrevet ved fordelingsfunksjonen $\pi_0(\theta)$ der θ er en realisasjon av den stokastiske variabelen, θ . I tilfeller med mer enn en parameter vil dette være en vektor. Merk at der θ inneholder diskrete element, kan hvert av de diskret utfallene anses som modeller. Vi oppdaterer parameter/modellsannsynlighetene med;

$$\pi(\theta | D) = \frac{f(D | \theta)\pi_0(\theta)}{f(D)} = \frac{L(\theta | D)\pi_0(\theta)}{\int L(\theta | D)\pi_0(\theta)d\theta} \quad (2)$$

der D står for data, $f(\cdot)$ for den antatte frekvensfordeling for D og $L(\cdot)$ for likelihoodfunksjonen. Her har vi definert L som frekventistisk sannsynlighet for data gitt modell og modell parametere som funksjon av modell og modell parametere, $L(\theta | D)$. Den initiale distribusjonen av θ , nemlig $\pi_0(\theta)$, blir kalt a priori distribusjon, mens den resulterende distribusjonen av θ etter behandling av data kalles a posteriori distribusjon.

Merk at hvis likelihood L har samme form som a priori distribusjon og dette igjen forplanter seg til a posteriori distribusjon, har vi et mye enklere problem. Vi kan nå simpelthen oppdatere metaparametrene i distribusjonsfunksjonen til parametrene. Slike distribusjoner kalles naturlige konjugerte av L , og er ofte brukt for å forenkle beregningene og muliggjøre analytisk behandling av problemstillingen. For å benytte seg av en slik metodikk bør ens a priori- (før) kunnskap kunne kodes tilfredsstillende ved å benytte seg av en slik distribusjon med et gitt sett metaparametere.

2.2 Bayesiansk lineær regresjon

Vi vil i denne rapporten basere oss på samme notasjon som Denison et al. (2002).

I en bayesiansk lineær regresjon starter vi med den vanlige regresjonsmodellen med p forklaringsvariable;

$$Y_i \sim N\left(\sum_{j=1}^p \beta_j B_j(\underline{x}_i), \sigma^2\right) \quad (3)$$

Her er Y_i responsen (det vi ønsker å forklare), \underline{x}_i er forklaringsvariable/prediktor/input-målingene, B_j er funksjoner/transformasjoner av disse inputene, og β_j er regresjonskoeffisientene. Vi får dermed følgende likelihood for datasettet $\{y_i, x_{i1}, \dots, x_{ip}\}$ for $i=1 \dots n$;

$$L(\beta_1, \dots, \beta_n | D) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left[y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j B_j(\underline{x}_i)\right]^2\right\} \quad (4)$$

Det som nå hadde være praktisk for å drive bayesiansk analyse var å ha en a priori fordeling for $(\underline{\beta}, \sigma^2)$ som var naturlig konjugert til likelihood i lig.4. Altså, vi ønsker en distribusjon som er slik at hvis vi ganger den med likelihood og normaliserer får vi en ny distribusjon på samme formen. Dette kan oppnås med følgende fordelinger;

$$\pi(\underline{\beta}, \sigma^2) = \pi(\underline{\beta} | \sigma^2) \pi(\sigma^2) \quad (5)$$

La så

$$\underline{\beta} | \sigma^2 \sim N(\underline{m}, \sigma^2 V) \quad (6)$$

og

$$\sigma^2 \sim IG(a, b) \quad (7)$$

der IG står for Invers Gammafordeling. Den totale fordelingen blir således skrevet som $NIG(\underline{m}, V, a, b)$. Da får vi;

$$\pi(\underline{\beta}; \sigma^2) = \frac{b^a (\sigma^2)^{-(a+p/2+1)}}{(2\pi)^{p/2} |V|^{1/2} \Gamma(a)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\underline{\beta} - \underline{m}]^t V^{-1} [\underline{\beta} - \underline{m}] + 2b\right\} \quad (8)$$

der t symboliserer en matrise transposisjon. Selv om dette kan anses for å være en vanskelig måte å kode vår forkunnskap om problemet, har den sine fordeler. Meta parametrene a og b kan virke litt abstrakte, men de kan anses for å kode forventet størrelse på støyen samt usikkerheten i et slikt anslag. Gitt disse meta parameterne vil matrisen V kode vår usikkerhet i koeffisientenes verdier, β_j . Vektoren \underline{m} koder rett og slett vårt beste før-anslag på koeffisientenes verdier, altså forventingen til $\underline{\beta}$. Hvis vi putter en slik a priori fordeling inn i Bayes formel med den gitte likelihood, får vi en ny NIG fordeling for vårt sett med regresjonskoeffisienter. Det eneste som har forandret seg er meta parametrene \underline{m}, V, a, b . Hvis vi definerer B -matrisen (ofte kalt X -matrisen i vanlig regresjon) som $B_{ij} = B_j(x_i)$, blir oppdaterte meta parametere som følger;

$$\underline{m}' = (V^{-1} + B^t B)^{-1} (V^{-1} \underline{m} + B^t \underline{Y}) \quad (9)$$

$$V' = (V^{-1} + B^t B) \quad (10)$$

$$a' = a + \frac{n}{2} \quad (11)$$

$$b' = b + \frac{1}{2} \left[\underline{m}'^t V'^{-1} \underline{m}' + \underline{Y}^t \underline{Y} - (\underline{m}')^t (V')^{-1} \underline{m}' \right] \quad (12)$$

(Husk at generelt: \underline{m}' er a posteriori og \underline{m} er a priori). Merk at hvis elementene i V'^{-1} blir mye mindre enn elementene i B -matrix (som betyr stor initial usikkerhet angående koeffisientene) får vi den vanlige regresjonsligningen;

$$\underline{m} = (B^t B)^{-1} B^t \underline{Y}.$$

2.3 Modellvalg, Occhams barberblad og regresjon med ikke-lineære bidrag

Gitt likelihood, a priori- og a posteriori fordeling av data kan man regne ut sannsynlighetstettheten til data gitt en regresjonsmodell (der regresjonsparametrene er integrert ut);

$$f(D | M) = \frac{f(D | \underline{\beta}, \sigma^2) \pi(\underline{\beta}, \sigma^2)}{\pi(\underline{\beta}, \sigma^2 | D)} = \frac{\pi^{-\frac{n}{2}} |V'|^{-1} (b')^{-a'} \Gamma(a')}{|V|^{-1} b^{-a} \Gamma(a)} \quad (13)$$

Dette kan benyttes til å sammenligne ulike modeller gjennom å putte lig.13 inn i Bayes formel for k ulike modeller M_k , noe som gir;

$$P(M_k | D) = \frac{f(D | M_k) P(M_k)}{\sum_{i=1}^k f(D | M_i) P(M_i)} \quad (14)$$

Man kan dermed for en initial tro på hver modell, $P(M_k)$, få oppdatert sin tro på modellen der nye data er tatt med i betraktningen. Dette kan være interessant på flere områder. Vi kan ha regresjonsmodeller som er vanskelig sammenlignbare i frekventistisk sammenheng. Dessuten kan vi ha at modellfamilien koder ulike verdier på en ikke-lineær regresjon.

Til sist kan vi ha nøstede modeller, det vil si modeller som er forfininger av en annen modell i samme familie. For å undersøke slike sammenhenger innfører vi Bayes-faktoren;

$$BF(M_i, M_j) = \frac{p(M_i | D)}{p(M_j | D)} \cdot \frac{p(M_i)}{p(M_j)} = \frac{p(D | M_i)}{p(D | M_j)} \quad (15)$$

Denne faktoren beskriver hvor mye sannsynligheten for en modell har økt eller minsket i forhold til en annen etter at data er blitt behandlet. Det kan vises at hvis M_2 er en modell som inneholder M_1 pluss unødvendige ekstra ledd vil Bayes-faktoren for M_1 mot M_2 være større enn en, det vil si at den enklere modellen vil bli favorisert (MacKay, 1995). Sagt på mer filosofisk måte inneholder bayesiansk regresjon Occhams barberblad, altså prinsippet om at man velger den enkleste modellen som beskriver ens observasjoner.

En kort begrunnelse for dette kan være at en diffus teori som beskriver data vil, når en integrerer over de diffuse koeffisientene, gi mindre sannsynlighet for data enn en mer spesifikk modell som også beskriver datasettet. Dermed vil Bayes-faktoren til den spesifikke teorien sett i forhold til den mer diffuse bli større enn en. Når en introduserer en unødvendig forklaringsvariabel, vil den respektive koeffisienten ha en god del usikkerhet, samt at de andre koeffisientene også blir mer usikre. Derfor vil en slik modell være "mer diffus" en original modellen.

Det er også verd å merke seg at hvis variansmatrisen V går mot uendelig (ubegrenset stor usikkerhet) vil den enkleste modellen alltid få størst sannsynlighet (Lindley's paradoks). Dette er ikke ønskelig, så variansmatrisen bør reflektere faktisk forkunnskap heller enn å kode en (forhåpentligvis falsk) beskjedenhet hva gjelder ens usikkerhet i regresjonskoeffisientene.

2.4 Bayesiansk modell- og responsestimering

Estimering i bayesiansk statistikk er tett knyttet til risikoanalyse. Man har en tapsfunksjon for feilestimering og forsøker å minimere risiko = forventet tap.

Når en a posteriori fordeling for hver lineær modell er beregnet samt a posteriori sannsynlighet for hver modell, er det to svært ulike ting man kan være på jakt etter. Hvis man mener at virkeligheten er beskrevet i en av modellene man har tilgjengelig, men ikke vet hvilken, kan dette beskrives ved tapsfunksjonen;

$$l(d_i, M_j) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i = j \\ 1 & \text{ellers} \end{cases} = 1 - \delta_{i,j} \quad (16)$$

Her står d_i for at man velger modell M_i . Velger man feil modell, får man altså et fast tap, mens man ikke får noe tap ved å velge rett modell. Dette kan kritiseres for å være for enkelt. Man kan synes det er verre å velge en ikke-homogen modell når den homogene er korrekt enn omvendt. Merk at det ikke er vanskelig å modifisere analysen hvis så var tilfelle. Skal uansett videre anta at en slik tapsfunksjon er interessant. Man minimerer nå forventet tap ved å betrakte;

$$E(l(d_i | D)) = \sum_{j=1}^M l(d_i, M_j) p(M_j | D) = 1 - p(M_i | D) \quad (17)$$

Denne tapsfunksjonen minimeres ved å velge modellen med størst sannsynlighet. Antagelsen om at sann modell ligger inne i vårt modellsett kalles ofte "lukket modell perspektiv".

Hvis man ikke er så sikker på at data er beskrevet via noen av modellene man har tilgjengelig, men uansett er interessert i det beste estimatet for responsen man kan få, gitt data og input, kan man heller betrakte en tapsfunksjon;

$$l(\tilde{y}, y) = (y - \tilde{y})^2 \quad (18)$$

der y er egentlig respons og \tilde{y} er den responsen man bestemmer seg for å benytte som prediksjon.

Dette kalles "åpent modell perspektiv". I dette tilfelle får vi minimert forventet tap ved å predikere;

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^M E(y | \underline{x}, D, M_i) p(M_i | D) = \sum_{i=1}^M (\beta^T(x) \underline{m}_i) p(M_i | D) \quad (19)$$

Man får altså en vektet midling over prediksjonene fra hver modell, der vektingen er a posteriori sannsynligheten til hver enkelt modell. Der man driver ikke-lineær regresjon via denne metodikken kan en slik type prediksjon være på sin plass.

2.5 Et enkelt eksempel

Vi tar for oss et eksempel med en respons, y , og en forklaringsvariabel, x . Data blir generert fra $x = 0$ til 1 uniformt, med $y_i = \tanh(2.35\pi(x_i - 0.5)) + 0.2\epsilon_i$. Vi antar vi vet at sann y antageligvis vil være i nærheten av intervallet $[-1, 1]$ for x innenfor $[0, 1]$ og at støyleddet har en varians på rundt 0.04, men med en usikkerhet som ligger i samme området ($a = 4$, $b = 0.08$). Vi henter inn 30 slike observasjoner. For de ulike modellene vi skal se på antar vi at koeffisientene er sentrert rundt 0 med varians på rundt 2. Vi ser først på følgende tre modeller;

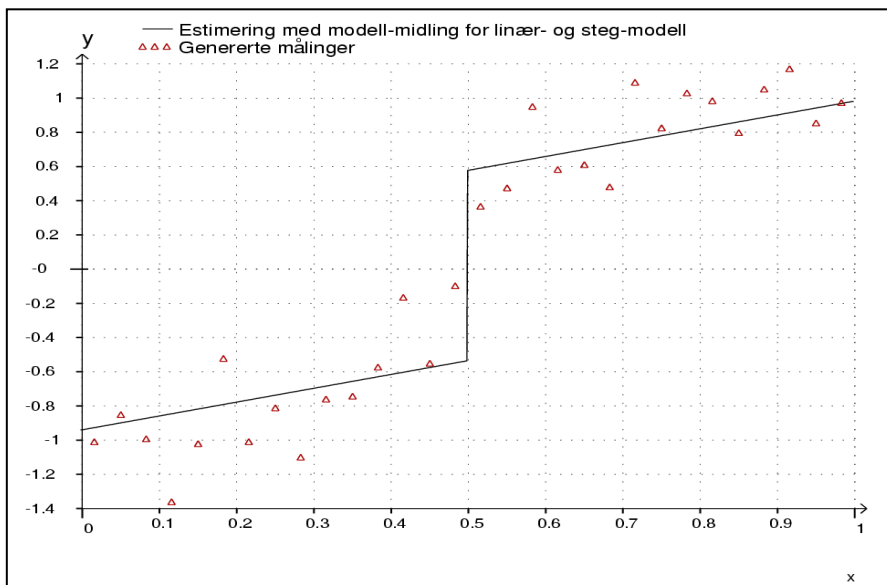
$$1) \quad Y = \beta_0 + \beta_1 x \quad (20a)$$

$$2) \quad Y = \beta_0 I(x \leq 0.5) + \beta_1 I(x > 0.5) \quad (20b)$$

$$3) \quad Y = \beta_0 + \beta_1 \tanh[2.35\pi(x - 0.5)] \quad (20c)$$

Hvis vi bruker lukket modell perspektiv her, vil estimering gå på den modellen med mest sannsynlighet. I dette tilfelle er det slik at forutsetningene for lukket modell perspektiv er til stede, så vi bør få at modell 3 tar all sannsynligheten. For en realisasjon (se figur 1) får vi at sannsynlighetene for modell 1 og 2 henholdsvis er 18 ppm (parts-per-million) og 44 ppm. Resten av sannsynligheten (nesten 100 %) går til modell 3, som inneholder den sammenhengen vi skal ha. Dette medfører at en estimering via modellmidling vil gi temmelig nøyaktig de samme prediksjonene som estimering via lukket modell perspektiv.

Hvis vi kun ser på de to første modellene, fikk vi for realisasjonen i figur 1 sannsynlighet 30 % og 70 % respektivt. Et lukket modellperspektiv (som inneholder en antagelse som ikke er korrekt i dette tilfelle) vil konkludere med stegmodell, mens en estimering med modellmidling vil gi prediksjonen som er plottet i figur 1.



Figur 1 Realisasjon av modell i lig.20c med modellmidlings estimat.

Det kan se ut til at modellmidlings estimatet gir en bedre beskrivelse av målingene enn hver av enkeltmodellene. Merk dog at eksempelet var valgt nettopp for å få noenlunde lik sannsynlighet på de to modellene. Skulle man undersøke sammenheng på formen til det modellmidlings estimatet vi fikk, hadde det nok heller betalt seg å se på modellen

$$Y = \beta_0 + \beta_1 I(x > 0.5) + \beta_2 x.$$

3 Bruk av Bayesianisk regresjon for å undersøke homogenitet

3.1 Modellene selv og praktiske hensyn

I denne sammenheng ønsker vi data der all autokorrelasjon er borte. Dette kan rimelig antas å stemme for års aggregerte data. Her anbefales det at man først og fremst ser på års maksima for å avgjøre om man kan foreta flomfrekvensanalyse, års minimum for å avgjøre om man kan foreta lavvannsanalyse og median sammen med de to andre for å sjekke om tidsserien generelt sett er homogen. (Fra praktisk erfaring har det vist seg at års median lettere fanger opp ikke-homogeniteter enn års middel).

I tillegg til en homogen (stasjonær) modell ser vi på fire ikke-stasjonære modeller, der vi antar at hvis vi velger rett modell vil avvikene fra modellen være stasjonære og uavhengige. Fire modeller for ikke-stasjonærhet kan for noen høres litt lite ut, men en bør ha i mente at det er års statistikk man jobber på og dermed sjelden har mer enn 100 'målinger' å betrakte. (Aldri så mye som 200 hva gjelder NVE's måleserier for dagens situasjon). Kompliserte modeller kan alltid komme nærmere et datasett på 100 eller færre målinger, uten at det sier oss annet enn at vi kanskje bør holde oss unna slike modeller.

Programmet betrakter fire modeller som forhåpentligvis kan fange opp det meste av det en hydrolog vil mene med ikke-homogenitet. Disse fire modellene skal i tillegg være enkle å tolke av en hydrolog. Håpet er at en slik betraktning samtidig kan fange opp alle relevante signal i data, slik at man får den mer eller mindre korrekte sannsynligheten for homogenitet.

Vannføringer lar seg best modellere statistisk hvis en først foretar en logaritmisk transformasjon. (Vannføringene ser i det store og hele ut til å være log-normal fordelte). En slik transformasjon gjøres dermed før modelleringene, mens for visning av resultatene blir modellene transformert tilbake igjen. Dette kan gi seg utslag i at en såkalt lineær modell vil krumme litt oppover på normalskala. (Med logaritmisk vannføringsakse vil den være rettlinjet).

Vi har følgende hovedmodeller å betrakte;

1) Homogen modell: $Q_t = \beta_0 + \sigma \varepsilon_i$ (21a)

2) Lineær modell: $Q_t = \beta_0 + \beta_1(t - \bar{t}) + \sigma \varepsilon_i$ (21b)

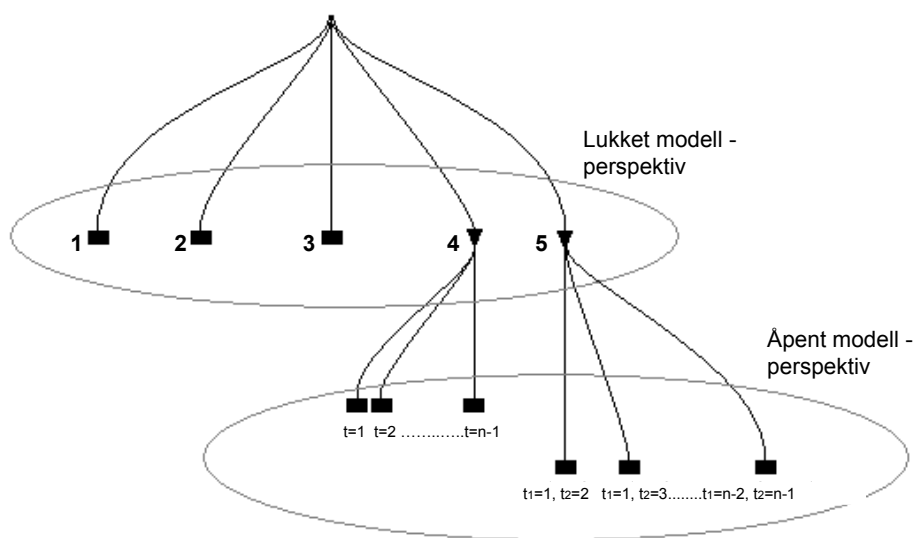
3) Kvadratisk modell: $Q_t = \beta_0 + \beta_1(t - \bar{t}) + \beta_2(t - \bar{t})^2 + \sigma \varepsilon_i$ (21c)

4) Ett steg modell: $Q_t = \beta_0 I(t \leq t_1) + \beta_1 I(t > t_1) + \sigma \varepsilon_i$ (21d)

5) To steg modell: $Q_t = \beta_0 I(t \leq t_1) + \beta_1 I(t_1 < t \leq t_2) + \beta_2 I(t > t_2) + \sigma \varepsilon_t$
 (21e)

Her er $t_1 \in [1, \dots, n-2]$ og $t_2 \in [t_1 + 1, \dots, n-1]$ ikke-lineære parametere, samt $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Merk at ett steg modellen igjen må deles opp i n-1 lineære regresjonsmodeller, mens to stegs modellen må deles opp i $(n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2$ lineære modeller. Totalt har man altså $n^2 - 2n + 5$ ulike lineære modeller. Sannsynligheten for de n-1 ulike ett steg modellene kan summeres opp til totalsannsynligheten for ett steg. Det kan fort hende at sannsynligheten for hver av enkeltstegsmodellene er mindre enn sannsynligheten for homogen modell, men at totalsannsynligheten for ett steg likevel er større enn sannsynligheten for homogenitet. Tilsvarende operasjon kan gjøres for to steg modellene for å få totalsannsynligheten for to steg modell. Merk at når en slik summering gjøres for sannsynligheten, er det mest naturlig å benytte seg av summering over sannsynligheter for ulike modeller innen samme modellklasse for å foreta prediksjoner. Programmet tillater uansett å plote den mest sannsynlige ett stegs eller to steg modellen sammen med totalprediksjonen for en slik modellklasse.



Figur 2 Grafisk representasjon av modellene. Lineær regresjonsmodell representert med fylte rektangler.

3.2 A priori fordelingene

En logaritmisk transformasjon er som sagt gjort før man begynner på analysen. Dette gjør at a priori kunnskap tilegnes størrelsesordenen på vannføringer i stedet for vannføringene selv, noe som er behagelig i og med at vannføringer i små elver typisk kan være på under 1 m³/s mens i store elver kan den være på flere tusen m³/s.

Først ser vi på fordelingen av parametrene til støyleddet, $\sigma^2 \sim IG(a, b)$. Setter i utgangspunktet $a = 4.0$, $b = 1.0$. Dette svarer til forventet σ^2 lik 1/3, med noe som tilsvarer åtte målinger. Dette kan kanskje gjøre usikkerheten litt liten, men likevel med ganske mye slingringsmonn. Typisk blir a posteriori forventning for størrelsen på støyleddet noe rundt 1/3 det også, noe som antyder at a priori innsikten er noenlunde korrekt.

Det neste vi trenger å forholde oss til er fordelingen på de ulike lineære koeffisienter. De som representerer vannføringsnivå (β_0 i alle modeller samt β_1 og β_2 for steg modellene) kan tas fra en analyse av hva man kan forvente av vannføring fra en tilfeldig valgt vannføringsstasjon. Det normale spennet av rimelige utfall her er fra $-4.5 \cdot \log(0.01)$ til 7 (ca. lik $\log(1000)$). Har i programmet så langt benyttet meg av forventning lik 2 og variansmatrise lik $62/E[\sigma_2]$ (som gir forventet varians lik 6²). Dette skulle kode min spesifikke forkunnskap angående vannføringsnivå, men her kan nok bidrag fra hydrologer komme til hjelp. Likevel, a priori kunnskap for disse koeffisientene burde kode hydrologisk forkunnskap omkring vannføringsstasjoner i Norge sånn noenlunde bra. For lineærleddet i modell 2 benyttes en forventning lik null (kan like godt ha oppadgående som nedadgående trend), mens variansen er på 0.01².

Et stigningstall på 0.01² skal gi en økning på $e=2.718\dots$ i løpet av hundre år. At stigningen skal være signifikant større enn dette virker for meg urealistisk, men igjen bør hydrologer kunne forbedre denne a priori innsikten. En kvikk gjennomgang av noen tidsserier som tilsynelatende hadde en lineær tidstrend så ut til å støtte en hypotese om at $\beta_1 \sim N(0, 0.01^2)$. Tilsvarende ble a priori for den kvadratiske biten av modell 3 satt til $\beta_2 \sim N(0, 0.0005^2)$.

For de ikke lineære komponentene av modell 4 og 5 kan det være fristende å sette hver av sub modellenes a priori sannsynlighet like. Det er for så vidt ikke noe galt i dette, men for tidsserier som ikke later til å ha trend i tid og som får størst a posteriori sannsynlighet for homogen modell later a posteriori sannsynligheten for enkeltbrudd ut til å være fordelt som $P(t_1) \propto 1/t_1(1-t_1)$. Det virker mer rimelig å forvente at a posteriori sannsynlighet skulle være lik over det hele når ingen tidstrend finnes. For modell 4 er det nok slik at en modell der steget er satt enten helt i starten eller helt i slutten av tidsrekka vil ha større sannsynlighet for data gitt modell en modeller der bruddet skjer midt inne i tidsrekka. Selv om man ikke får stort tilslag for ett stegs modell i slike tilfeller, kan det uansett være fornuftig å vekte for hvor interessert man er i modeller med steg i start/slutt av tidsrekka versus i midtre del av tidsrekka. Har derfor benyttet meg av en a priori fordeling på bruddet t_1 ; $P(t_1) \propto t_1(1-t_1)$. En tilsvarende analyse av to steg modellen gav $P(t_1, t_2) \propto t_1 t_2 (n-t_1-t_2)$.

Det så ikke ut til å påvirke totalsannsynligheten for de to siste modellene nevneverdig i noen av de eksemplene jeg kjørte, samtidig som det gav mer tilforlidelig a posteriori sannsynlighet for de ulike sprangene for de tidsrekkene som så ut til å være homogene.

3.3 Kalkulasjon og visning av a posteriori sannsynlighet for modeller og modellparametere

Som sagt har vi i bunn og grunn n^2-2n+5 ulike lineære regresjonsmodeller. For hver modell kan vi plugge inn data og få oppdatert fordelingen til regresjonsparametrene. Vi kan så benytte oss av disse igjen til å beregne a posteriori sannsynlighetene for hver modell. For de to steg modellene kan sannsynlighetene innen hver modellklasse summeres ut. Vi får dermed sannsynligheten for hver av de fem større modellene. Programmet viser dette i en sortert liste sammen med mest sannsynlige steg modell og mest sannsynlige to steg modell. Bortsett fra de to siste, som utgjør en dobbelttelling i forhold til ett og to stegsmodellen henholdsvis, vil sannsynlighetene summere seg opp til 100%.

I tillegg vises hver modell tekstlig for seg selv. Plottmuligheter for modellene sammen med data eksisterer også. A posteriori sannsynligheten for de ulike sprangmodellene kan også plottes.

DAGUT lignende innhenting av tidsserie og spesifikasjon av metode for aggregering samt seleksjon av år

Spesifikasjon av forkunnskap. Nødvendig for å kunne gi sannsynlighet for ulike modeller. En kan variere innenfor rimelighetens grenser for å se om resultatene er stabile.

Presentasjon av resultatet. Listen inneholder modellene sortert på sannsynlighet.

Plotting av modeller avmerket i listen

Plotting av sprang-sannsynligheter

Figur 3 Brukergrensesnitt for programmet.

3.4 Vanlig bruk av *check homogeneity*

Når programmet skal benyttes for en stasjon, bør en først spørre seg selv om en er generelt interessert i homogeniteten til tidsserien eller om man kun er interessert i en spesifikk anvendelse, sånn som flomfrekvensanalyse. For en flomfrekvensanalyse er det kun interessant om årlige maksima er stasjonære. Er de ikke det, er forutsetningene for en slik analyse brutt. Tilsvarende har en for lavvannsanalyse og års minima. Hvis en er mer generelt interessert i hva som kan ha skjedd med stasjonen anbefales, det at man foretar en analyse på års maksima, -median og -minima. Dette settes enkelt i menyen oppe i høyre hjørne av vinduet.

Når en analysemetode er gitt, kan man se over a priori sannsynlighetene til hver av de fem hovedmodellene. Merk at sannsynlighet for ett stegs modell ikke er med, siden denne kan finnes som 1-P(homogen)-P(lineær)-P(kvadratisk)-P(tosteg). Er man fornøyd med disse (normalt er man det), kan man kjøre analysen. Merk at hvis en ønsker å være grundig og sjekke om konklusjonene fra programmet er robuste, bør en variere på forkunnskap sannsynlighetene innenfor det en synes er rimelig og se om dette forandrer konklusjonene en tidligere trakk.

Det første en kan merke seg er sorteringen av modeller i lista nede til venstre. Den mest sannsynlige hovedmodellen vil ligge øverst, med den nest mest sannsynlige nest øverst etc. Mer spesifikk informasjon omkring hver hovedmodell blir gitt i tekstboksen til høyre for lista. Denne er utskrivbar, se knappene til høyre for ”avslutt” knappen.

Data kan plottes sammen med de hovedmodellene man finner mest interessante (default er å kun vise mest sannsynlige hovedmodell) samt mest sannsynlige ett sprangs og to sprangs modell. 95% troverdighetsintervall (altså intervallet der det er 95% sannsynlighet for at 'sann' verdi skal være) for modellene vil også kunne vises, hvis man aktiviserer knappen til venstre for ”plotte” knappen. Datamodell plott kan være av interesse for å sjekke at korrekt modell har fått mest sannsynlighet. Merk at data blir plottet som punkter. Hvis man vil ha en mer klassisk fremstilling av tidsseriedata, kan man i plottet velge sammenhengende linjer i stedet.

For de som er ekstra interessert kan man også plote a posteriori sannsynlighetene for de ulike ett sprangs eller to sprangs modellene.

3.5 Tolkning av ulike ikke-homogene resultater

Ikke-homogenitet har man når års verdier avhenger av tiden. Det finnes en uendelighet av ulike avhengigheter, men de kan grovsorteres i to leire;

- 1) Brå, stykkvise forandringer
- 2) Langsomme, glidende forandringer

I dette programmet har de to enkleste modellene i hver av disse klassene blitt betraktet.

- 1) Brå, stykkvise forandringer: enkelt og dobbeltsprang (se påfølgende tegning).



2) Langsomme, glidende forandringer; lineær og kvadratisk trend over tid.

Ikke-homogenitet i en hydrologisk tidsserie kan skyldes flere faktorer:

- a. Forandringer i relasjonen vannføring – vannstand (vannføringskurve) ved stasjonen (skyldes ofte at bestemmende profil/elvestrekning endrer geometri og/eller friksjon grunnet sedimentasjon, erosjon eller menneskeskapte inngrep)
- b. Større forandringer i vannføringskurven uten at det har skjedd reelle forandringer i relasjonen vannstand – vannføring ved stasjonen (skyldes ofte at man har konstruert en ny vannføringskurve periode som skiller seg signifikant fra den foregående vannføringskurve perioden, slik at minst en av kurvene er uriktige).
- c. Forandringer i registrering av vannstand (f.eks. 1) systematisk avvik grunnet at referansebolt er flyttet og/eller at ny vannstandsskala er bygget; 2) bytte av vannstandssensorutstyr hvorav gammel og/eller ny sensor måler uriktig; 3) hele målested for vannstandsregistrering er flyttet hvorav nytt og/eller gammelt målested er ugunstig for registrering av vannstand; eller 4) endringer i kommunikasjon mellom elv og kum/stigerør).
- d. Feil eller forandringer i dataprosessering (f.eks. 1) unøyaktig komplettering eller isreduksjon av data; 2) feil konverteringsfaktor på data; 3) ukorrekt innlesning/digitalisering av data; eller 4) data tilknyttet feil stasjon.)
- e. Hydrologiske forandringer i selve nedbørfeltet (typisk inn- eller utførsel av vann i forbindelse med regulering eller magasinering som vil endre flom/lavvanns dynamikken. Store masseutskiftninger og urbanisering kan endre hydrologien betraktelig.)
- f. Klimaendringer.

Faktor a-d kan klassifiseres som forandringer i hydraulikk og data prosessering ved målestasjonen mens faktor e-f kan klassifiseres som hydrometeorologiske forandringer i feltet tilknyttet målestasjonen.

Med mindre alle andre forklaringer er eliminert, kan man se bort ifra (f), som skal ha en relativt liten effekt. De ulike problemene vil gi seg utslag i ulike ikke-homogeniteter;

- a) Vil normalt gi glidende forandring (normalt ses dette best på

minimumsverdier og små persentiler). Men man kan også få brå profilforandringer (under flom?).

- b) Vil kunne gi store sprang for tidspunktet den brå forandringen skjedde, både for minimum, median og maksimum.
- c) Vil normalt gi sprang hvis forandringen i vannstandsavlesning skjedde brått, men man kan også ha glidende forandringer (kan ses på som mange små sprang). Dette kan skje både for minimum, median og/eller maksimum.
- d) Vil også normalt gi sprang for tidspunktet der metodikken endret seg, men slik metodikk *kan* forandres gradvis. Mest aktuelt for minimumsverdier, men man kan også få utslag for maksimumsverdier. (Median bør ikke gi utslag her).
- e) Reguleringer skjer gjerne brått (i stor tidsskala), men i store felt kan effekten av mange små forandringer gi seg utslag som en glidende trend. Normalt ser man slike utslag best på maksimums- og medianverdier.
- f) Skal gi en glidende trend, gjerne en lineær trend.

Dette er kun dog foreløpige retningslinjer for å utvikle et skjønn hva gjelder forklaring av ikke-homogeniteter. Det er hydrologens skjønn som avgjør hvilken forklaring som benyttes når en ikke-homogen modell har fått størst sannsynlighet.

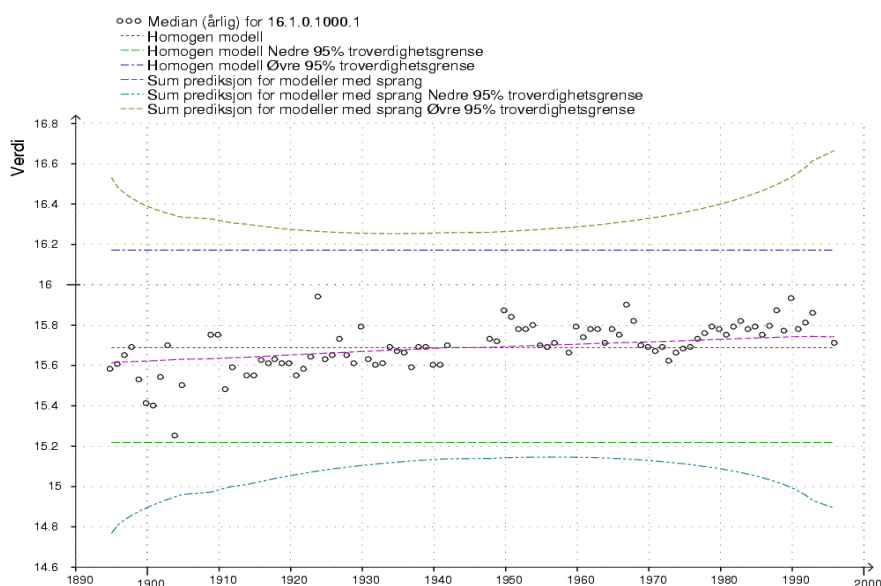
4 Eksempler på bruk

4.1 Homogenitet

I de fleste tilfeller er det homogen modell som får størst sannsynlighet etter databehandling. Dette er godt, da de fleste av NVEs tidsserier ved øyesyn ser ut til å være homogene for års statistikk. Når a priori sannsynligheten likevel er satt så lavt som 50%, er det fordi en bruker har bemerket at programmet muligens går litt for ofte for homogen modell. Sannsynligheten er derfor bevisst nedjustert litt i forhold til erfaringsgrunnlaget for å kompensere for dette. Dette kan ses på som en svakhet, men merk at det her kun dreier seg om en mild justering. Tilfeller der bruker eller DMASS-programmet har konkludert med ikke-homogenitet mens `check_homogeneity` har gått for homogen modell eksisterer, men det skjer ikke så ofte. Der slikt skjer og det virkelig er slik at konklusjonen om ikke-homogenitet er korrekt, er det rimelig å anta at en mer kompleks regresjon hadde kunne beskrive ikke-homogeniteten. Under presentasjon av programmet har brukerne derfor blitt bedt om å holde øye med slike forekomster og rapportere dette samt kanskje selv undersøke hva slags ikke-homogen modell som kan virke mest rimelig. Så langt (etter ett halvårs bruk) har ikke slike forekomster blitt

rapportert, men programmet kan være lite i bruk for tiden. Merk at hovedinnholdet i programmet også benyttes i programmet `check_ratingcurve` som forhåpentligvis blir mer brukt.

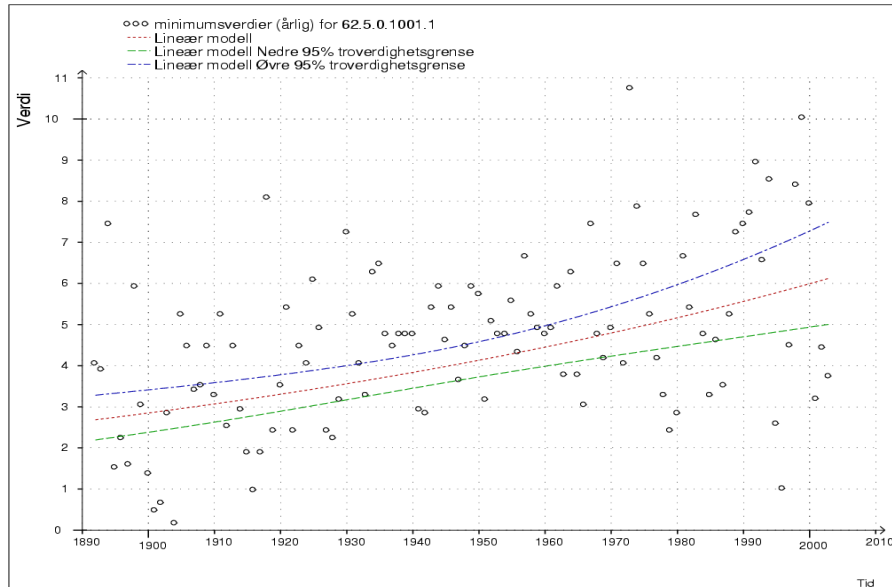
Figur 4 viser en tidsserie (Notodden, 1887-1997) der homogen modell fikk 98.7% sannsynlighet. Sammen med gjennomsnitt og 95% troverdighetsintervall vises det samme for en summert ettsprang-modell. En ser her at mens ettsprang-estimeringen kanskje følger bedre data (det er dog liten forskjell i estimeringsfeilene) har den betydelig mer usikkerhet i estimeringen. Dette betyr at sannsynligheten for data når man summerer/integrerer over mulige koeffisienter (både lineære og ulineære) blir betydelig lavere enn med en modell med mindre usikkerhet. Homogen modell har som sagt mindre usikkerhet, noe som forklarer hvorfor den er mye mer sannsynlig enn ettsprang-modellen.



Figur 4 Data samt estimat og troverdighetsintervall for homogen- og ettsprang-modell.

4.2 Lineær modell

I et tilfelle der lineær modell har fått mest sannsynlighet, kan ting tyde på at ting gradvis har forandret seg. Et eksempel på dette kan være sedimentering av elvebunnen, som gradvis vil forskyve bunn-nivået i sammenhengen mellom vannstand og vannføring. Siden det er vannstander som normalt måles, vil en slik sedimentering gi seg utslag i en gradvis forandring av års statistikk hentet fra lave vannstander, sånn som års minima. Et eksempel på dette er stasjonen Bulken (62.5.0), 1892-2004, der årlige minimumsverdier analyseres. En ender opp med en sannsynlighet for lineær trend på 63% (med andre ikke-homogene modeller på andre- og tredjeplass). Estimeringen (samt troverdighetsintervall) er vist i figur 5. Mer at estimeringen krummer seg oppover. Det er fordi modellen er lineær i log-rommet mens det her er vist som vannføring.

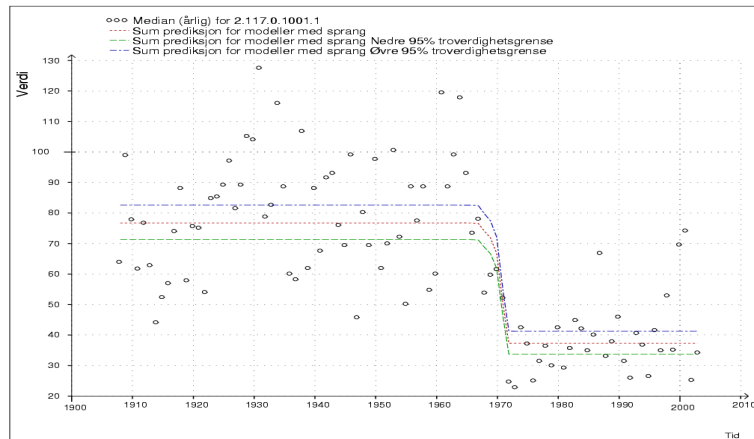


Figur 5 Minimumsdata fra Bulken i Vosso med sannsynlig modell.

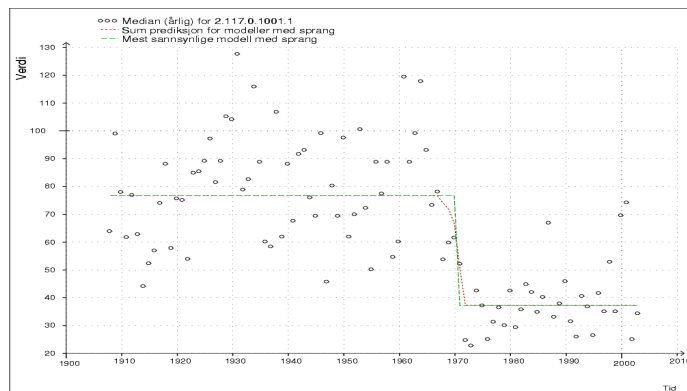
Når minimumsvannstandene endrer seg gradvis, er det nærliggende å tro at en sedimentering av elvebunnen har forandret reell sammenheng mellom vannstand og vannføring for små vannføringer. Ikke-homogeniteten er derfor ikke nødvendigvis reell, men et resultat av at naturens sammenheng mellom vannstand og vannføring gradvis har forandret seg mens NVEs beskrivelse av denne sammenhengen ikke har gjennomgått samme forandring.

4.3 Ettsprangs-modell

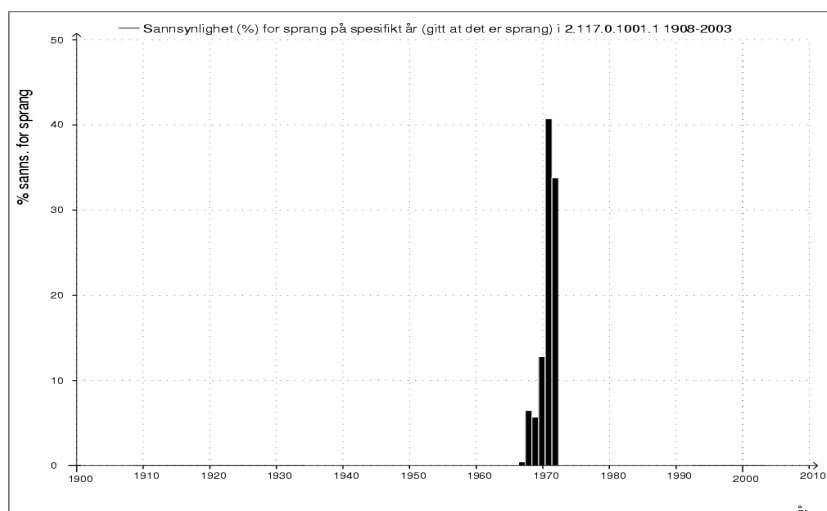
Vi skal nå ta en titt på en stasjon der man har en brå forandring i årsmedian (og årsgjennomsnitt), nemlig Stai (2.117.0). Data er hentet fra 1908-2003 og ser ut til å ha et sprang rundt starten av 1970-tallet, noe programmet bekrefter med en sannsynlighet på 99.8%. Dette skyldes nok en forandring i vassdraget (regulering). I figur 6 vises total ettsprang-modell (summering over ikke-lineær koeffisient), mens figur 7 viser den mest sannsynlige enkeltmodellen (40.6% sannsynlighet). Ser at totalmodellen har en litt myk overgang i stedet for en terskel. Dette er fordi det er mer enn bare en modell rundt 1970 som har en betydelig sannsynlighet, se figur 8.



Figur 6 Estimering fra total ettsprang-modell med troverdighetsintervall for Stai.



Figur 7 Estimering basert på mest sannsynlige ettprang-modell sammen med estimeringen der det summeres over den ikke-lineære parameteren (total ettsprang-modell) for Stai.

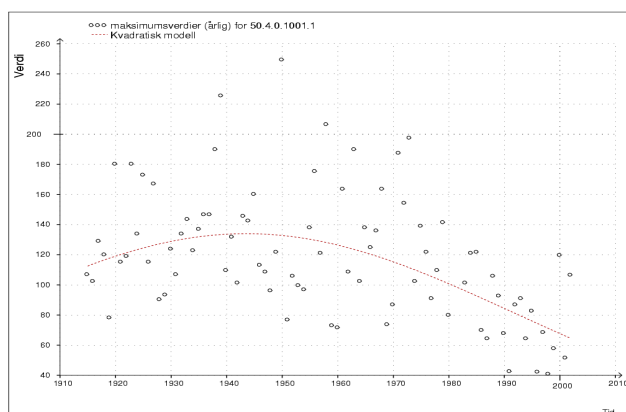


Figur 8 Sannsynligheter (a posteriori) for sprang på ulike år.

Man ser at en ikke kan konkludere bestemt på at spranget skjer i 1971, men at det ganske sikkert har skjedd i perioden 1968-1972).

4.4 Kvadratisk trend

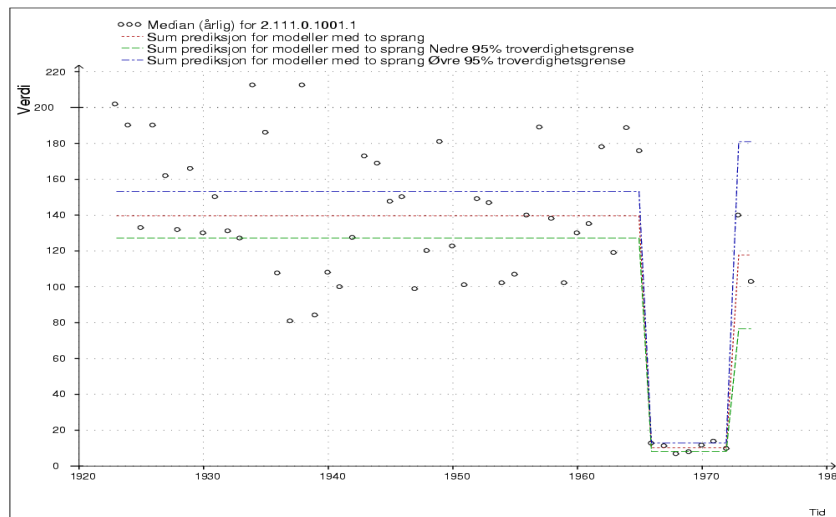
Et kvadratisk signal i tidsutviklingen er mer sjeldent, men det finnes eksempler på det også. Et av dem er maksimumsverdiene for Vivel (50.4.0) for perioden 1915-2003. Her ender kvadratisk modell opp med 63.9 % sannsynlighet. En kan se på plottet at dette virker ganske rimelig, se figur 9. Det anbefales dermed ikke å foreta flomfrekvensanalyse på denne stasjonen.



Figur 9 Data med estimeringen fra kvadratisk modell for Vivel.

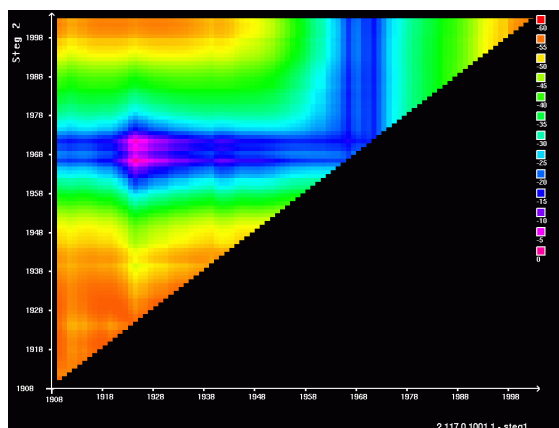
4.5 Tosprang-modell

Heller ikke tosprangsmodellen slår til alt for ofte. Dette er for så vidt godt siden dette og tilsvarende for kvadratisk modell antyder at desto mer kompleks modellen blir, desto mindre bidrar de totalt med i sannsynlighet. Likevel, stasjonen Aursunden ser ut til å ha nettopp en slik trend. Det første spranget skjer i overgangen 1965-1966 mens det andre skjer i slutten av tidsserien, i overgangen 1972-1973 (se figur 10).



Figur 10 Mest sannsynlige modell for Aursunden.

Tosprangsmodellen ender opp med meget nær 100% sannsynlighet. Blant tosprangsmodeller ender de rapporterte sprangene opp med nesten all sannsynligheten, mens de andre mulige sprangene har sannsynligheter som er flere størrelsesordener unna, se figur 11.



Figur 11 Logaritmiske sannsynligheter for tosprangsmodeller.

5 Litt risikoanalyse

I lukket modellperspektiv er alle feilvurderinger av modeller like ille. Dette kan beskrive hva man gjør når man leter etter den sanne modellen. Men det er ikke alltid at man nødvendigvis skal avgjøre hva man skal tro, men heller hva man skal foreta seg. Selv om man kanskje tror at man kommer fra et fall på si fire meter uten store skader, så er gevinsten med et slikt hopp normalt liten og skaden hvis man tar feil ganske stor. De færreste ville derfor være villig til et slikt hopp.

Hvis homogenitetsanalyse skal brukes i beslutninger, kan man ha tilsvarende føringer. Vi har generelt at forventet tap for en gitt beslutning er sum over alle utfall av tap gitt beslutning og modell ganger sannsynligheten til modellen;

$$R(d) = \sum_{i=1}^M L(d, M_i) P(M_i) \quad (22)$$

Har vi lukket modellperspektiv, der beslutninger er å bestemme seg for en modell, får vi at forventet tap er 1 sannsynligheten for modellen, noe som minimeres ved å finne modellen med størst sannsynlighet (se ligning 17). Sorteringen i modell-lista bygger på denne filosofien.

La oss i stedet si at vi skal foreta en beslutning om å nedlegge en stasjon pga ikke-homogenitet, eller fortsette å bruke den. En områdeingeniør kan avgjøre at det er 9 ganger verre å anta ikke-homogenitet når stasjonen er homogen enn motsatt. Vi summerer sannsynligheten til alle ikke-homogene modeller og får at stasjonen ikke nedlegges hvis $P(\text{ikke-homogen}) < 9P(\text{homogen})$, altså $P(\text{homogen}) > 1/10 = 10\%$.

Hvis det i stedet er slik at man ønsker å foreta flomfrekvensanalyse i et vassdrag med si fem stasjoner, koster det lite å bestemme seg for å bruke en annen stasjon hvis en stasjon viser seg å ha ikke-homogen års maksimum. Det å foreta analysen på en ikke-homogen stasjon (som kan skyldes dårlig modellert sammenheng mellom vannstand og vannføring) kan derimot gi gale beslutninger som kan koste mye. En kan for eksempel avgjøre at det å anta homogenitet når stasjonen er ikke-homogen er fire ganger verre enn å anta at den er ikke-homogen gitt at den egentlig er homogen. Dermed får man at stasjonen kan brukes til flomfrekvensanalyse hvis $4P(\text{ikke-homogen}) < P(\text{homogen})$ som gir at $P(\text{homogen}) > 4/5 = 80\%$.

Slike betraktninger bør kanskje med i programmet etter hvert, men det kan skape en større brukerterskel og de som ha et forhold til risiko kan uansett benytte seg av de sannsynlighetene som programmet rapporterer til egen risikoanalyse.

6 Mulige utvidelser

Som sagt kan en del risikoanalyse puttes direkte inn i programmet, hvis det er ønskelig. Hydrologer kan bidra med bedre a priori-sannsynligheter. Merk også at a priori-fordelingene for vannføring ikke nødvendigvis er oppfylt for vannføringsserie/vannstandsserie. Dette bør det kompenseres for. Hydrologer kan også bidra med flere ikke-homogene modeller hvis dette skulle vise seg nødvendig. Det kan også være et program skal kunne benyttes på andre datatyper enn vannføring, si temperatur, sedimentføring eller nedbør. Et ren fil-orientert versjon av programmet bør nok også lages for å muliggjøre at brukerne benytter seg av programmet for data utenfor databasen, samt for å muliggjøre ekstern testing og bruk.

7 Konklusjon

Denne analysemetodikken ser ut til å være både pålitelig og brukervennlig. Dette i kombinasjon med at den ser ut til å være mer omfattende enn den rådende analysemetodikken (DMASS) innebærer at bayesiansk regresjon til bruk i homogenitetsanalyse må anses som en suksess. I tillegg til å benyttes i utforskningsprogrammet '*check homogeneity*' ble derfor metodikken også benyttet da et nytt kvalitetssjekkingsprogram for vannføringskurver ble implementert, nemlig '*check ratingcurve*'.

En utvidelse av metodikken til å omfatte også andre typer tidsserier og andre kilder enn HydraII-databasen ser ut til å være ønskelig.

8 Takk

Forfatterne ønsker å takke André Soot, Hydrologisk avdeling NVE, for hjelp i å finne gode eksempler. Det rettes også en takk til Prof. Bernt Natvik, Avdeling for Statistikk og Forsikringsmatematikk UIO, for hans gjennomlesning av de første utkastene til rapporten.

9 Referanser

Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, second edition, – Springer, Ch 4.1-4.4

Denison, D.G.T., Holmes, C.C., Mallick, B. K. and Smith, A. F. M. (2002). *Bayesian Methods for Nonlinear Classification and Regression*, Wiley Series in Probability and Statistics.

Roald, L., (1981). *Kvalitetskontroll av hydrometriske data, rapport fra nordisk IHP-arbeidsgruppe for kvalitetskontroll og databehandlingsspørsmål.*

World Meteorological Organization (1994). *Guide to Hydrological Practices, second ed. WMO-No.168, Geneva.*

Denne serien utgis av Norges vassdrags- og energidirektorat (NVE)

Utgitt i Rapportserien i 2005

- Nr. 1 Tor Arnt Johnsen (red.): Kvartalsrapport for kraftmarkedet, 4. kvartal 2004 (70 s.)
- Nr. 2 Hervé Colleuille, Tina Vestersager: Nasjonalt overvåkingsnett for grunnvann og markvann (Fysiske parameter). Driftrappport 2004. Status pr. januar 2005 (75 s.)
- Nr. 3 Jan Henning L'Abée-Lund: Miljøeffekter av små kraftverk (78 s.)
- Nr. 4 Panagiotis Dimakis: Grunnvannsanalyse ved to utvalgte strekninger langs Jong-Asker tunnelen (31 s.)
- Nr. 5 Trond Reitan, Asgeir Petersen-Øverleir: Evaluering av Homogenitet i Hydrologiske Tidsreiser ved hjelp av Bayesiansk Regresjon (27 s.)