

V-Publikasjon

nr. 8

Tron Laumann

EN DYNAMISK MODELL FOR ISBREERS BEVEGELSE

NORGES
VASSDRAGS- OG ENERGIVERK
BIBLIOTEK



VASSDRAGSDIREKTORATET
HYDROLOGISK AVDELING
1987

(50)9CC

FORORD

Isbreer er meget følsomme for endringer i klima. Endringene merkes først og fremst ved at breareal blir større eller mindre. Det er av interesse å få større kunnskap om ulike isbreers reaksjon på klimaendringer.

I utbyggingsplanene for Breheimen-Stryn og Svartisenutbyggingen, inngår anlegg i nær tilknytning til breer. I den siste tiden har det forekommet endel ulykker i forbindelse med ras fra breer. Turisttrafikk og næringsvirksomhet i breenes nærhet vil antagelig øke i tiden fremover. Elveløpenes stabilitet, sedimenttransport og hydrologi er avhengig av brevariasjoner.

Den foreliggende rapport beskriver en datamodell som med antatte inngangsdata beregner virkningene på breens areal.

Prosjektet ble initiert og ledet av Bjørn Wold. Det er finansiert av Hydrologisk avdeling og Kongsesjonsavgiftsfondet. Cand.real. Tron Laumann har forfattet rapporten og laget datasystemet.

Oslo, i oktober 1987



Arne Tollan
Avd.dir.

INNHold

	Side
1. INNLEDNING	3
2. TEORI	4
2.1 Kontinuitetsligningen	4
2.2 Ligninger som beskriver breens dynamikk	4
2.3 Ligninger som beskriver breens geometri	6
2.4 Oversikt over ligninger brukt i modellen	8
3. NUMERISK MODELL	8
3.1 Koordinatsystem og gridnett	8
3.2 Ligningene på endelig differense form	9
3.3 Residualligning	10
3.4 Korreksjonsmetodikk	11
3.5 Grensebetingelser	14
4. PRAKTISK BRUK AV MODELLEN	21
4.1 Innledning	21
4.2 Lage en fil for inngangsdata til modellen (innfil)	22
4.3 Rette en ferdiglaget innfil	25
4.4 Kjøre bremodellen	25
4.5 Lage utskrifter og plottinger fra resultatfiler	26
4.6 Lage en ny innfil fra en resultatfil	26
4.7 Sammenkoble to resultatfiler fra samme bre	27
5. OPPBYGGINGEN AV DATASYSTEMET	27
5.1 Struktur	27
5.2 Rettinger	27
6. PLOTTE-EKSEMPLER FRA RESULTATFIL	29
7. ETTERORD	34
8. ENGLISH SUMMARY	34
9. REFERANSER	36

1. INNLEDNING

Klimatiske forandringer vil ha store virkninger for mange sider av vår natur og vårt samfunn. Isbreer har i lang tid blitt betraktet som en god og følsom klima-indikator. Ulike breer innenfor et område vil vanligvis reagere likt på større klimatiske forandringer. For kortere tidsperioder (2-10 år) er det imidlertid observert relativt store forskjeller innenfor begrensede områder. Noen breer går fram, mens andre trekker seg tilbake. Noe av forklaringen kan ligge i forskjellig lokalklima, mens de enkelte breers form og størrelse kan forklare variasjonene i andre tilfeller.

Virkningene av brevariasjoner er vel kjent fra historisk tid, kanskje klarest ved at land blir borte under framrykkende breer eller nytt land blir tilgjengelig foran breer i tilbakegang. Hyppighet av skred og flommer kan også ofte relateres til brevariasjoner. Likeledes er elveløpenes stabilitet, sedimenttransport og hydrologi avhengig av brevariasjoner. Selv mindre endringer i en bres areal er viktig for aktiviteten i disse marginale områder. Vi har i dag flere eksempler på at områder der vanninntak for kraftverk var planlagt foran breer i dag faktisk ligger under breene. Etter hvert som det blir mer og mer aktivitet nær breene vil det være viktig å kunne forutsi endringene av brefrontens beliggenhet med noenlunde sikkerhet for de nærmeste årene.

Norge har noen av de beste dataserier i verden på breers frontvariasjoner og massebalanse. Det meste av dette er samlet av Norsk Polarinstitutt og Brekontoret, Hydrologisk avdeling, NVE. Disse unike data kan benyttes til å utvikle og kalibrere en modell for en nærmere og mer grunnleggende forståelse av hvordan breene i Norge reagerer på endringer i klimaet. Det er i dag tre typer slike modeller som kan brukes. Den første er en enkel steady-state en-dimensjonal modell hvor breens lengdeprofil er delt opp i et antall elementer, og isflyten inn og ut av hvert element blir beregnet. Denne typen modell er nettopp benyttet på et tilsvarende problem i forbindelse med et kraftverksprosjekt i Sveits.

Den andre modellen er basert på det samme fysiske prinsipp om massens bevaring og bruker den samme oppdeling av lengdeprofiler i elementer, men er mer komplisert fordi den også er tidsavhengig. Dette er den såkalte Bindschadler-modell (Bindschadler 1978). Ved å starte med et gitt overflateprofil og et gitt massebalansemønster, kan en beregne de fortløpende forandringer i profilet over tid og derved få en idé om hvor lang tid det vil ta for breen til å nå en ny steady-state.

Den tredje modellen er en såkalt finite-element modell utviklet av Hooke & al. (1979). I denne modellen blir lengdeprofilet oppdelt i et stort antall elementer både vertikalt og horisontalt. Finite-element beregninger har den fordel at selv meget uregelmessige grenser kan bli modellert nøyaktig hvis tilstrekkelig mange elementer brukes. En slik beregning kan også gi mer informasjon om indre deformasjon og stress. Den kan også bli kjørt i tid, men kan sannsynligvis ikke håndtere endringer i profilet som er så store som de som dekkes av Bindschadlers modell.

Modellen som her er utviklet, tar utgangspunkt i Bindschadlers modell. Såkalte "shape factors" av breens geometri inkorporerer en

tredimensjonal karakter i systemet. I utgangspunktet er modellen utviklet for Variegated Glacier, men er senere bearbeidet for Columbia Glacier (Bindshadler & Rasmussen 1983). En videre bearbeiding er her foretatt for at modellen også skal kunne brukes på breer av den norske type; dvs. breer som fra et øvre platå har flere dalbreutløpere.

2. TEORI

2.1 Kontinuitetsligningen

Basisligningen for modellen er kontinuitetsligningen i en-dimensjonal form:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = bW \quad 2.1$$

hvor S er tverrsnittsarealet, Q er volumet, b er nettobalanse over tverrsnittet og W er bredde. Alle variablene er funksjoner av både tid og sted. X-aksen følger den sentrale flytelinje, positiv retning i breens flyteretning. Modellen er altså en-dimensjonal og den grunnleggende størrelsen er maksimaldybden i hvert tverrsnitt. Alle de andre variablene er gitt som funksjon av dybden på en slik måte at den en-dimensjonale modellen skal gi et best mulig bilde av den tre-dimensjonale virkelighet. De grunnleggende ligningene kan deles i to hovedgrupper: 1) de som beskriver breens dynamikk og 2) de som beskriver breens geometri.

2.2 Ligninger som beskriver breens dynamikk

Basalskjærstrekket

For deformasjon i isbreer blir vanligvis Glens lov benyttet.

$$\dot{\epsilon} = a \cdot \tau^n \quad 2.2$$

Her er $\dot{\epsilon}$ effektiv deformasjonshastighet, τ er gjennomsnittlig skjærstrekk, a og n er empiriske konstanter.

$a = 0,148 \text{ bar}^{-n} \text{ år}^{-1}$ og $n = 4,2$ eller $n = 3$. Når breen har uendelig bredde, overflaten og bunnen er parallelle og det ikke er variasjoner i hastigheten langs x-aksen, har vi laminær bevegelse. Da vil skjærstrekket langs bunnen være bestemt av:

$$\tau_b = \rho g H \sin \alpha \quad 2.3$$

der H er dybden vinkelrett på overflaten, ρ er isens tetthet, g er tyngdens akselerasjon og α er hellingen på breoverflaten.

Skjærstrekkfaktor f.

Friksjon fra dalsider i en virkelig bre vil bevirke at det gjennomsnittlige skjærstrekket ved bunnen av breen vil være mindre enn det teoretiske beregnede av ligningen 2.3. Det virkelige skjærstrekket vil altså være en brøkdel av det beregnede. Nye (1965) har beregnet verdier for f (velocity shape factor) for forskjellige typer kanaler. Disse verdiene blir benyttet for dalbreen i denne modellen. Beregninger av f for det øvre platå bygger på det geometriske uttrykket:

$$f = \frac{S}{P \cdot H} \quad 2.4$$

hvor S er tverrsnittsarealet, P er lengden av is/fjell kontakten og H er maksimaldybden (Nye 1952).

Ved å inkorporere f i ligningen for basalskjærstrekket får vi følgende ligning:

$$\tau = f \cdot g \cdot H \sin \alpha \quad 2.5$$

Hastighetsformler

Hastighetsfordelingen i en bre består av komponenter bestemt av indre deformasjon i isen, u_d , og glidning langs bunnen, u_s .

$$u = u_s + u_d \quad 2.6$$

Hastigheten som skyldes indre deformasjon kan finnes ved å integrere ligningen for basalskjærstrekket over dybden.

$$u_d = \frac{2a}{n+1} \tau^n H^{n+1} \quad 2.7$$

Hastighetskomponenten som skyldes glidning langs bunnen er vanskelig å beregne og mange teorier er utviklet. I denne modellen er en enkel parametrisering brukt, definert som følger:

$$\lambda = \frac{u_s}{u} \quad 2.8$$

$\lambda=0$ betyr altså ingen glidning langs bunnen. Den virkelige størrelsen til λ er vanskelig å estimere, men hastighetsmålinger om sommeren og vinteren kan muligens gi et grovt bilde av forholdene. Rent intuitivt vil man vel også anta at λ er større i et brefall, enn på flate områder på breen. En mulighet for å inkorporere glidning i modellen er bruk av ligning 2.8.

Volumflux

I den grunnleggende kontinuitetsligningen inngår volumflux, og hastigheten må derfor konverteres til volumflux. Volumfluxen gjennom et tverrsnitt S er:

$$Q = \bar{u} \cdot S = f^* \cdot u \cdot S \quad 2.9$$

der $\bar{u}$ er middelhastigheten i tverrsnittet og u er gitt i ligning 2.6.

f^* er en brøkdel av senterhastigheten på overflaten. Denne brøkdelen blir kalt volumfluxfaktor (flux shape factor). Nye (1965) har også beregnet f^* for forskjellige typer kanaler. Disse beregnede verdier blir her brukt både for "dalbreen" og "platåbreen". Ligningene 2.6, 2.7, 2.8 og 2.9 gir oss da:

$$Q = \left(f^* + \frac{\lambda}{1-\lambda} \right) u_d \cdot S \quad 2.10$$

2.3 Ligninger som beskriver breens geometri

Som tidligere nevnt er modellen en-dimensjonal med maksimaldybden langs breen som den grunnleggende variable. Ligning 2.6 - 2.10 gir oss volumfluxens avhengighet av dybden. Det står da igjen å finne en sammenheng mellom bredde og dybde, og mellom tverrsnittsareal og dybde. Denne parametriseringen er forskjellig for dalbre og platåbre.

Dalbre

For en dalbre er bredden (W) på et gitt sted:

$$W = AH^{\frac{1}{2}} + BH \quad 2.11$$

A og B er konstanter som gir oss tverrsnittets form. Ligning 2.11 er en lineær kombinasjon av en ren V-formet dal ($A=0$) og en parabelformet dal ($B=0$). H er maksimaldybden i tverrsnittet. De fleste daler ligger innenfor disse ytterpunkter. Tverrsnittsarealet, S , fås ved å integrere ligning 2.11.

$$S = \frac{2}{3} AH^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} BH^2 \quad 2.12$$

Platåbre

En platåbre består vanligvis av et øvre platå og en nedre dalbreutløper. Dalbreutløperens tverrprofil blir parametrisert som ovenfor.

For det øvre platå vil vanligvis ikke økning av dybden resultere i en forandring av bredden. Bredden vil altså bare være en funksjon av stedet. Denne bredden blir her betegnet med W_k . Bredden på et gitt sted er altså:

$$W = W_k \text{ (konst)} \quad 2.13$$

Tverrsnittsarealet vil variere med dybden, men en generell sammenheng mellom tverrsnittsareal og maksimaldybde er det vanskelig å finne, fordi beregningsprofilen på tvers av breen kan variere mye. Se fig. 1.

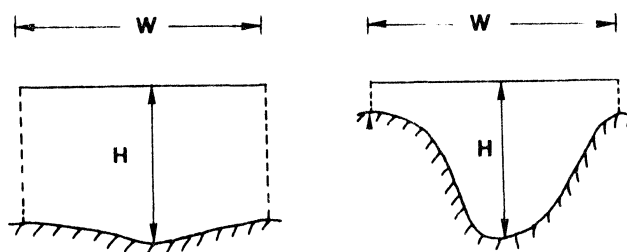


Fig. 1. Tverrsnittsarealet kan variere mye selv om bredden (W) og dybden (H) er like.

Cross-sectional area can vary considerably despite constant width (W) and depth (H).

Følgende funksjon er derfor valgt:

$$S = S_k + W_k(H - H_k) \quad 2.14$$

S_k og H_k er henholdsvis tverrsnittsareal og maksdybde på et gitt sted ved et fritt valgt tidspunkt. Disse størrelsene er inngangsdata til modellen, og er i dag mulige å måle ved hjelp av breradmålinger i breens øvre områder (fig. 2.).

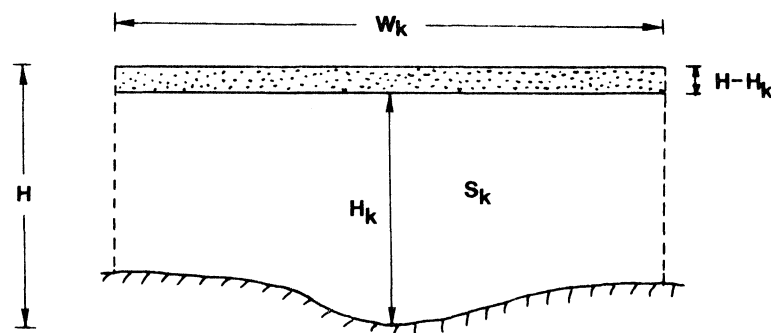


Fig. 2. Arealet S av hele tverrsnittet er $S = S_k + W_k(H - H_k)$. S_k , H_k og W_k er konstanter.

Area S of complete cross-section is given by $S = S_k + W_k(H - H_k)$. S_k , H_k and W_k are constants.

2.4 Oversikt over ligninger brukt i modellen

Kontinuitetsligningen:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = b \cdot W$$

Breens dynamikk:

$$\begin{aligned}\tau &= f g g H_{ind} \\ u_d &= \frac{2a}{n+1} \tau^n H \\ \lambda &= \frac{u_s}{u} \\ Q &= \left(f^* + \frac{\lambda}{1-\lambda}\right) u_d S\end{aligned}$$

Breens geometri:

1) Dalbre

$$\begin{aligned}W &= A \cdot H^{\frac{1}{2}} + B \cdot H \\ S &= \frac{2}{3} A H^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} B H^2\end{aligned}$$

2) Platåbre

$$\begin{aligned}W &= W_k \\ S &= S_k + W_k (H - H_k)\end{aligned}$$

3. NUMERISK MODELL

Den numeriske modellen er utførlig beskrevet av Bindschadler (1978), men for helheten og oversiktens skyld, vil jeg her ta med hovedprinsippene i beregningene. Det er dessuten foretatt en modifisering for at modellen skal kunne brukes på platåbreer.

3.1 Koordinatsystem og gridnett

Et Eulers koordinatsystem er lagt inn slik at x-aksen er horisontal og følger senterlinjen; y-aksen er vertikal. Et sett av punkter x_i er lagt inn langs breen. Dette koordinatsystemet er fast i rommet (fig. 3).

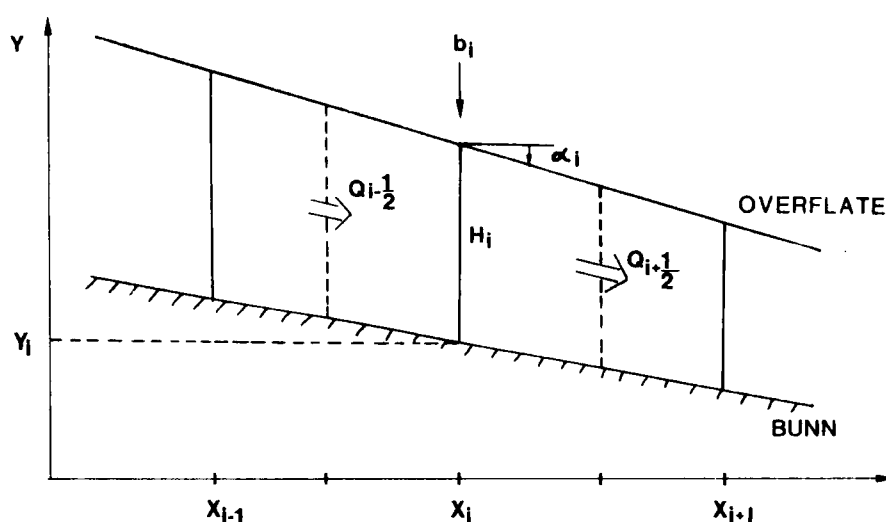


Fig. 3. Et sett punkter x_i er lagt inn langs breen. Inn og ut flux, $Q_{i \pm \frac{1}{2}}$, av et tverrsnitt blir beregnet i midtpunktene $x_{i \pm \frac{1}{2}}$. α_i er overflatehelling og b_i er nettobalansen.

A set of points x_i are placed down the glacier. Flux in and out, $Q_{i \pm \frac{1}{2}}$, through a cross-section is calculated at mid-points $x_{i \pm \frac{1}{2}}$. α_i is surface slope and b_i is net balance.

For å løse ligningssystemene ad numerisk vei er en endelig differanse (finite-difference) metode valgt. Kontinuitetsligningen og de andre ligningene i kapittel 2.4 må derfor omskrives til endelige diskrete tidssteg og diskrete avstander langs x-aksen.

3.2 Ligningene på endelig differanse form

Kontinuitetsligningen

I kontinuitetsligningen beregnes noen variabler i x_i og andre variabler i midtpunktet $x_{i+1/2}$ (se fig. 3).

Kontinuitetsligningen får da følgende form:

$$\frac{S_{i,t+\Delta t} - S_{i,t}}{\Delta t} + \frac{Q_{i+\frac{1}{2},t+\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2},t+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})} = b_i \frac{1}{2}(W_{i,t+\frac{1}{2}} + W_{i,t}) \quad 3.1$$

der

$$Q_{i+\frac{1}{2},t+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(Q_{i-\frac{1}{2},t+\frac{1}{2}} + Q_{i+\frac{1}{2},t})$$

og Δt er tidssteg.

Systemet blir referert til som "Crank-Nicholson finite difference scheme", og $Q_{i+1/2, t+1/2}$ er gjennomsnittsfluxen over tidssteget.

Breens geometri

For bredde og tverrsnittsareal blir ligningene:

$$W_i = A_i H_i^{\frac{1}{2}} + B_i H_i \quad 3.2$$

$$S_i = \frac{2}{3} A_i H_i^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} B_i H_i^2 \quad 3.3$$

for en dalbre og

$$W_i = WK_i \quad 3.4$$

$$S_i = SK_i + WK_i (H_i - HK_i) \quad 3.5$$

for en platåbre.

Breens dynamikk

På samme måte som volumflux blir overflatehelling, basalskjærstrekk og hastighet beregnet i midtpunktet $x_{i+1/2}$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} = \tan^{-1} \left[\frac{(H_i + Y_i) - (H_{i+1} + Y_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} \right] \quad 3.6$$

$$\tau_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}} \cdot g \cdot \left(\frac{H_{i+1} + H_i}{2} \right) \cdot \sin \alpha_{i+\frac{1}{2}} \quad 3.7$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2a}{n+1} \tau_{i+\frac{1}{2}}^n \cdot \left(\frac{H_{i+1} + H_i}{2} \right) \cos \alpha_{i+\frac{1}{2}} \quad 3.8$$

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \left(f_{i+\frac{1}{2}}^* + \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{1 - \lambda_{i+\frac{1}{2}}} \right) \cdot u_{i+\frac{1}{2}} \cdot \frac{S_{i+1} + S_i}{2} \quad 3.9$$

Cos-leddet i 3.8 må her tas med fordi H i den numeriske modellen er vertikaldyp, mens H i ligning 2.7 er dybde vinkelrett på overflaten.

3.3 Residualligning

Ligningssystemet bestående av ligning 3.1 til ligning 3.9 representerer et finite-difference system hvor dybden H er den grunnleggende variable. For å løse systemet numerisk blir kontinuitetsligningen gjort om til en såkalt residualligning:

$$R_i = \frac{S_{i,t+1} - S_{i,t}}{\Delta t} + \frac{Q_{i,t,t+1} - Q_{i-1,t,t+1}}{\frac{1}{2}(x_{i,t+1} - x_{i-1,t+1})} - b_i \cdot \frac{1}{2}(W_{i,t+1} + W_{i,t}) \quad 3.10$$

Hvis alle dybdene H er kjent både ved tiden t og tiden $t+1$, vil R_i teoretisk være lik 0. Dette er selvsagt ikke tilfelle. Det nye ukjente dybdeprofilen finnes ved å foreta suksessive korreksjoner på et forsøksvis valgt dybdeprofil inntil R_i blir tilstrekkelig nær 0. Det første forsøket er lik den opprinnelige dybden ved tiden t . Når R_i blir liten nok slutter iterasjonen og modellen går over til neste tidssteg. Den nye dybden blir satt lik den gamle, og samme korreksjonsprosedyre begynner på nytt.

Som en akseptabel øvre grense for R_i er valgt den feil man kan forvente ved stakemålinger (± 1 cm pr år). Med et tverrsnitt på 1 km resulterer dette i en størrelse på $R_i = 10 \text{ m}^2$ pr år.

3.4 Korreksjonsmetodikk

Selve korreksjonsmetoden er utførlig beskrevet i Bindschadler (1978), men fordi det her er foretatt noen endringer i forhold til Bindschadlers modell, vil det nedenfor bli gitt en beskrivelse av metoden.

Ved galt valg av framtidig dybdeprofil, vil R_i være en funksjon av tre ukjente dybder.

$$R_i = f(H_{i-1,t+1}, H_{i,t+1}, H_{i+1,t+1}) \quad 3.11$$

Dette skyldes at volumfluxen er beregnet i $x_{i-\frac{1}{2}}$ og $x_{i+\frac{1}{2}}$ for hver x_i . Hvis disse dybdene blir riktig korrigert, reduseres R_i til null.

$$R_i = f(H_{i-1,t+1} + \delta h_{i-1}, H_{i,t+1} + \delta h_i, H_{i+1,t+1} + \delta h_{i+1}) = 0 \quad 3.12$$

Tilnærming ved hjelp av Taylorutvikling (og fjerning av subskriptet $t+1$ for å forenkle gir):

$$R_i + \frac{\partial R_i}{\partial H_{i-1}} \delta h_{i-1} + \frac{\partial R_i}{\partial H_i} \delta h_i + \frac{\partial R_i}{\partial H_{i+1}} \delta h_{i+1} = 0 \quad 3.13$$

eller ved omstokking:

$$\frac{\partial R_i}{\partial H_{i-1}} \delta h_{i-1} + \frac{\partial R_i}{\partial H_i} \delta h_i + \frac{\partial R_i}{\partial H_{i+1}} \delta h_{i+1} = -R_i \quad 3.14$$

Ligning 3.14 representerer et sett av ligninger, en for hver x_i , hvor de ukjente δh_i må løses simultant, dvs. samtidig for alle i .

Ved breens begge endepunkter vil R_i være en funksjon av bare to ukjente dybder.

$$R_0 = f(H_{0,t+1}, H_{1,t+1})$$

for breens øvre grense og

$$R_T = f(H_{T,t+1}, H_{T-1,t+1})$$

for breens terminus (T).

Som ovenfor vil man ved Taylorutvikling av R_0 og R_T få:

$$\frac{\partial R_0}{\partial H_0} \delta h_0 + \frac{\partial R_0}{\partial H_1} \delta h_1 = -R_0 \quad 3.15$$

$$\frac{\partial R_T}{\partial H_{T-1}} \delta h_{T-1} + \frac{\partial R_T}{\partial H_T} \delta h_T = -R_T \quad 3.16$$

Dette ligningssystemet (3.14, 3.15 og 3.16) kan løses raskt på en computer fordi korreksjonsmatrisen er tridiagonal (Gauss-Seidel eliminasjon). Nedenfor er ligningssystemet skrevet på matriseform (fig. 4).

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_0}{\partial H_0} & \frac{\partial R_0}{\partial H_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & & & & \cdot \\ \vdots & \vdots & \cdot & \frac{\partial R_i}{\partial H_{i-1}} & \frac{\partial R_i}{\partial H_i} & \frac{\partial R_i}{\partial H_{i+1}} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial R_T}{\partial H_{T-1}} & \frac{\partial R_T}{\partial H_T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta h_0 \\ \vdots \\ \delta h_i \\ \vdots \\ \delta h_T \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_0 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_T \end{pmatrix}$$

Fig. 4. Matriser for løsning av det tridiagonale ligningssystemet på grunnlag av Gauss-Seidel eliminasjon.

Matrices for solving the tridiagonal equation system by Gauss-Seidel elimination.

De eksplisitte uttrykk for korreksjonskoeffisientene i ligning 3.14 er avhengig av om breen er en dalbre eller platåbre. Uttrykkene er som følger:

Dalbre:

$$\frac{\partial R_i}{\partial H_{i-1,t+1}} = -\frac{T5_{i-1}}{X_{i+1}-X_{i-1}} \left[\frac{1}{2H_{i-1,t+1}} (T1_{i-1}(n+\frac{5}{2}) + T2_{i-1}(n+3)) + T6_{i-1} \right] \quad 3.17$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i}{\partial H_{i,t+1}} &= \frac{1}{\Delta t} (A_i (H_{i,t+1})^{\frac{1}{2}} + B_i H_{i,t+1}) - \frac{1}{2} b_i (A_i (H_{i,t+1})^{-\frac{1}{2}} + B_i) \\ &+ \frac{T5_{i+1}}{X_{i+1}-X_{i-1}} \left[\frac{1}{2H_{i+1,t+1}} (T1_{i+1}(n+\frac{5}{2}) + T2_{i+1}(n+3)) + T6_{i+1} \right] \\ &- \frac{T5_{i-1}}{X_{i+1}-X_{i-1}} \left[\frac{1}{2H_{i-1,t+1}} (T1_{i-1}(n+\frac{5}{2}) + T2_{i-1}(n+3)) - T6_{i-1} \right] \end{aligned} \quad 3.18$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial H_{i+1,t+1}} = \frac{T5_{i+1}}{X_{i+1}-X_{i-1}} \left[\frac{1}{2H_{i+1,t+1}} (T1_{i+1}(n+\frac{5}{2}) + T2_{i+1}(n+3)) - T6_{i+1} \right] \quad 3.19$$

Platåbre:

$$\frac{\partial R_i}{\partial H_{i-1,t+1}} = -\frac{T5_{i-1}}{X_{i+1}-X_{i-1}} \left[\frac{1}{2H_{i-1,t+1}} (WK_{i-1}(H_{i-1,t+1})^{n+2} + T7_{i-1}(n+1)) + T8_{i-1} \right] \quad 3.20$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i}{\partial H_{i,t+1}} &= \frac{WK_i}{\Delta t} \\ &+ \frac{T5_{i+1}}{X_{i+1}-X_{i-1}} \left[\frac{1}{2H_{i+1,t+1}} (WK_{i+1}(H_{i+1,t+1})^{n+2} + T7_{i+1}(n+1)) + T8_{i+1} \right] \\ &- \frac{T5_{i-1}}{X_{i+1}-X_{i-1}} \left[\frac{1}{2H_{i-1,t+1}} (WK_{i-1}(H_{i-1,t+1})^{n+2} + T7_{i-1}(n+1)) - T8_{i-1} \right] \end{aligned} \quad 3.21$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial H_{i+1,t+1}} = \frac{T5_{i+1}}{X_{i+1}-X_{i-1}} \left[\frac{1}{2H_{i+1,t+1}} (WK_{i+1}(H_{i+1,t+1})^{n+2} + T7_{i+1}(n+1)) - T8_{i+1} \right] \quad 3.22$$

der:

$$T1 = \frac{2}{3} A H^{n+\frac{5}{2}} \quad 3.23$$

Den siste dybden som ikke er lik null ved tiden t er $H_{I+\frac{1}{2},t}$. $Q_{I+\frac{1}{2},t}$ er volumflux midt mellom $X_{I+\frac{1}{2}}$ og X_T . Ved tiden $t+1$ er tilsvarende notasjoner $H_{I+\frac{1}{2},t+1}$ og $Q_{I+\frac{1}{2},t+1}$. Dessuten er dybden ved X_T lik $H_{T,t+1}$. $DX1$ og $DX2$ er avstanden fra $X_{I+1/2}$ (origo) til brefronten ved henholdsvis tiden t og $t+1$.

Kontinuitetsligningen forteller at volumet er konserverv i alle gridpunkter. Ved å betrakte kilen nedenfor 0, kan følgende "volumligning" stilles opp:

$$Vol_{t+1} = Vol_t + \frac{1}{2} (Q_{I+\frac{1}{2},t+1} + Q_{I+\frac{1}{2},t}) \Delta t + b_{I+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (O_{t+1} + O_t) \Delta t \quad 3.32$$

hvor Vol og O er henholdsvis volumet og overflaten av kilen nedenfor $X_{I+\frac{1}{2}}$. $b_{I+\frac{1}{2}}$ er nettobalansen over kilen. For at ligningen skal være sammenlignbar med residualligningen (3.10), må vi dividere med Δt og $DX1$.

$$R_T = \frac{Vol_{t+1} - Vol_t}{DX1 \cdot \Delta t} - \frac{1}{2} \frac{Q_{I+\frac{1}{2},t+1} + Q_{I+\frac{1}{2},t}}{DX1} - b_{I+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \frac{O_{t+1} + O_t}{DX1} \quad 3.33$$

For å beregne R_T trenger vi et uttrykk for Vol og O . Fig. 6 viser et generelt bilde av en bretunge med origo i $X_{I+1/2}$ og avstand til bretungen lik DX . S og W er gitt i ligning 2.11 og 2.12.

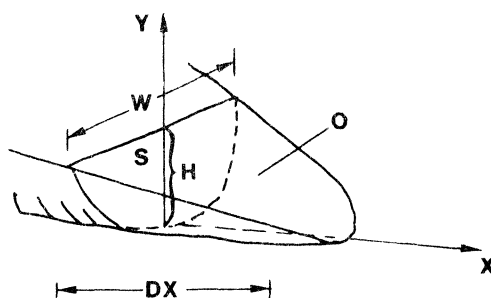


Fig. 6. Kileformet front med origo i $x_{I+\frac{1}{2}}$. W er bredden av breen, S er tverrsnittsarealet. H er maksimaldypet, O er arealet av kilen og DX avstand fra origo til brefront.

Wedge-shaped front with origin at $x_{I+\frac{1}{2}}$. W is width of glacier, S is cross-sectional area. H is maximum depth, O is area of wedge and DX distance from origin to glacier front.

$$Vol = \int_0^{DX} S dx = \left(\frac{4}{15} A H^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6} B H^2 \right) DX \quad 3.34$$

$$O = \int_0^{DX} W dx = \left(\frac{2}{3} A H^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} B H \right) DX \quad 3.35$$

En siste ligning som kreves for å få løst ligningssystemet, er en sammenheng mellom DX1 og DX2. Fig. 7 gir de nødvendige informasjonene.

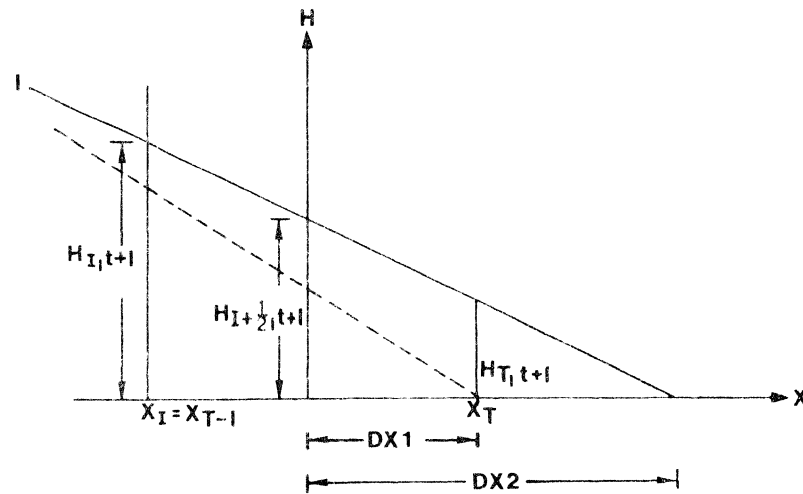


Fig. 7. Kileformet front for beregning av frontposisjoner. Den stiplede linjen angir breoverflaten ved tiden t. Linja l angir overflaten ved tiden t+1. Origo er lagt inn midt mellom X_I og X_T . Avstanden for origo til brefronten er DX1 og DX2. DX2 skal beregnes.

Wedge-shaped front for calculation of front position. Dashed line indicates surface at time t, and line l at time t+1. Origin is placed midway between x_I and x_T . Distance from origin to glacier front is DX1 and DX2. DX2 is calculated.

Ligningen for l er:

$$H(x) = H_{I+\frac{1}{2}} - \frac{H_{I+\frac{1}{2}}}{DX2} x \quad 3.36$$

Innsatt koordinaten ($DX1, H_{T,t+1}$) gir:

$$DX2 = \frac{H_{I,t+1} + H_{T,t+1}}{H_{I,t+1} - H_{T,t+1}} DX1 \quad 3.37$$

Ligning 3.34 - 3.37 gir oss nok informasjon slik at R_T kan løses. Korreksjonsleddene i korreksjonsmatrisen er:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_T}{\partial H_{T,t+1}} = T13 \left(\frac{T9}{\Delta t} - b_{T+\frac{1}{2}} \cdot \frac{T10}{2} \right) - \frac{2 H_{T,t+1}}{(H_{T,t+1} - H_{T,t+1})^2} \left(\frac{T11}{\Delta t} - b_{T+\frac{1}{2}} \cdot \frac{T12}{2} \right) \\ - \frac{T5_{T+\frac{1}{2}}}{2DX1} (T14(T1_{T+\frac{1}{2}}(n+\frac{5}{2}) + T2_{T+\frac{1}{2}}(n+3)) + T6_{T+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad 3.38$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_T}{\partial H_{T,t+1}} = T13 \left(\frac{T9}{\Delta t} - b_{T+\frac{1}{2}} \cdot \frac{T10}{2} \right) + \frac{2 H_{T,t+1}}{(H_{T,t+1} - H_{T,t+1})^2} \left(\frac{T11}{\Delta t} - b_{T+\frac{1}{2}} \cdot \frac{T12}{2} \right) \\ - \frac{T5_{T+\frac{1}{2}}}{2DX1} (T14(T1_{T+\frac{1}{2}}(n+\frac{5}{2}) + T2_{T+\frac{1}{2}}(n+3)) - T6_{T+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad 3.39$$

der:

$$T9 = \frac{2}{3} A H^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} B H \quad 3.40$$

$$T10 = \frac{4}{15} A H^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6} B H^2 \quad 3.41$$

$$T11 = \frac{1}{3} A H^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} B \quad 3.42$$

$$T12 = \frac{2}{3} A H^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} B H \quad 3.43$$

$$T13 = \frac{H_{T,t+1} + H_{T,t+1}}{2(H_{T,t+1} - H_{T,t+1})} \quad 3.44$$

$$T14 = (H_{T,t+1} + H_{T,t+1})^{-1} \quad 3.45$$

$$H = H_{T+\frac{1}{2},t+1}, \quad A = A_{T+\frac{1}{2}}, \quad B = B_{T+\frac{1}{2}} \quad 3.46$$

Systemet kan benyttes både for en bre i tilbakegang og i framgang.

Fordi gridpunktene er faste, men ikke brefronten, vil man ved en bre som trekker seg tilbake få problemer med modellen når avstanden fra $X_{T+\frac{1}{2}}$ til fronten får en viss minste verdi. Da vil ikke modellen lenger klare å finne $H_{T,t+1}$ (ligningene blir ustabile og $H_{T,t+1}$ blir etter hvert uendelige store).

For å løse dette problemet, er det valgt å legge inn et koordinat-system som følger breen på en slik måte at antall punkter innenfor breens totale lengde alltid er den samme, og med siste punkt alltid i breens front. Breens tilbakegang eller framgang blir altså fordelt over alle gridpunktene. Verdiene til de variable, slik som dybde, geometriske parametere, nettobalanse osv., blir så for hvert tidssteg justert ved hjelp av lineær interpolasjon mellom de opprinnelige faste gridpunktene.

Kalvingsfront

Når en isbre står i vann vil det foregå en økende smelting og undergraving av breens front i forhold til en landfast bre. Denne smeltingen blir her sett på som en utgående flux Q_{ka} (se fig. 8). Størrelsen på fluxen er vanskelig å beregne. En empirisk kalvingslov, utviklet av Brown et al. (1982) på 13 tempererte breer i Alaska, er benyttet her:

$$Q_{ka} = c h_w S_T \quad 3.47$$

der h_w er vanddypet foran senterlinja, S_T er tverrsnittsareal i fronten og c er en empirisk funnet konstant. For breer i Alaska der tidevannseffekten er inkorporert fant man $c=16,94 \text{ år}^{-1}$. For små vann i norske høyfjell er nok tallet adskillig lavere. I Sveits bruker man et tall på ca 2 år^{-1} (Röthlisberger; pers. medd.).

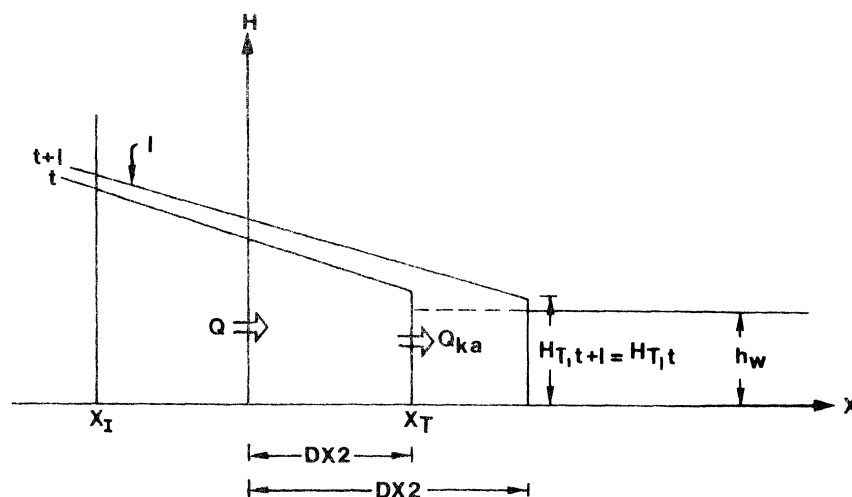


Fig. 8. Kalvingsfront der vanddypet foran breen er konstant og bretykkelsen er avstemt etter vanddypet slik at breen står på bunnen. Tegnforklaringer i teksten.

Calving front where water depth in front of glacier is constant and glacier thickness is set according to water depth such that glacier rests on bed.

Når breer går ut i vann vil breens ytre del etter hvert flyte. De isshelfer som finnes i verden i dag, finner vi i forbindelse med polare breer. Dette faktum kan bety at for tempererte breer dannes det raskt isfjell som fjernes fra selve breen.

Fig. 8 viser en brefront der vanddypet er konstant lik h_w og breens tykkelse er avstemt etter dybden på vannet, slik at $H_{T,t} = 1.1 h_w$. Breen står altså på bunnen av vannet.

Ved et eventuelt framstøt vil også framtidig tykkelse i fronten være $H_{T,t}$. På samme måte som for kileformet front er volumet konserverte nedenfor $x_{I+1/2}$:

$$Vol_{t+1} = Vol_t + \frac{1}{2}(Q_{I+1/2,t+1} + Q_{I+1/2,t})\Delta t + b_{I+1/2} \frac{1}{2}(O_{t+1} + O_t)\Delta t - Q_{ka}\Delta t \quad 3.48$$

Residualligningen blir da:

$$R_T = \frac{Vol_{t+1} - Vol_t}{DX1 \cdot \Delta t} - \frac{1}{2} \frac{Q_{I+1/2,t+1} + Q_{I+1/2,t}}{DX1} - b_{I+1/2} \frac{1}{2} \frac{O_{t+1} + O_t}{DX1} + \frac{Q_{ka}}{DX1} \quad 3.49$$

Av fig. 8 ser vi at ligningen for linja 1 er:

$$H(x) = H_{I+1/2,t+1} - \frac{H_{I+1/2,t+1} - H_{T,t+1}}{2 DX1} \cdot X \quad 3.50$$

$$\text{der } H_{I+1/2,t+1} = \frac{1}{2}(H_{I,t+1} + H_{T,t+1})$$

Sammen med ligningene 2.13 og 2.14 kan O og Vol beregnes for denne type front.

$$O = \int_0^{DX} W dx = \left[\frac{2}{3} A(H_{I+1/2,t+1})^{\frac{3}{2}} - H_{T,t}^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{1}{2} B(H_{I+1/2,t+1}^2 - H_{T,t}^2) \frac{DX}{\Delta H} \quad 3.51$$

$$Vol = \int_0^{DX} S dx = \left[\frac{4}{15} A(H_{I+1/2,t+1})^{\frac{5}{2}} - H_{T,t}^{\frac{5}{2}} \right] + \frac{1}{6} B(H_{I+1/2,t+1}^3 - H_{T,t}^3) \frac{DX}{\Delta H} \quad 3.52$$

Sammenhengen mellom $DX1$ og $DX2$ finnes som for kile. Vi får her:

$$DX2 = \frac{H_{I,t+1} + H_{T,t+1} - 2H_{T,t}}{H_{I,t+1} - H_{T,t+1}} DX1 \quad 3.53$$

For varierende vanndyp foran breen vil beregningsmetodikken være noe annerledes. For økende vanndyp vil, hvis vi lar brefronttykkelsen være konstant, breen etterhvert nå en såkalt flytegrense og brekke av som isfjell (fig. 9). For et tidssteg beregnes det et framstøt til X_F . Det beregnes så hvor mye som skal brekke av. Den nye brefront justeres inn til X_N , og neste tidssteg starter med denne nye frontposisjonen.

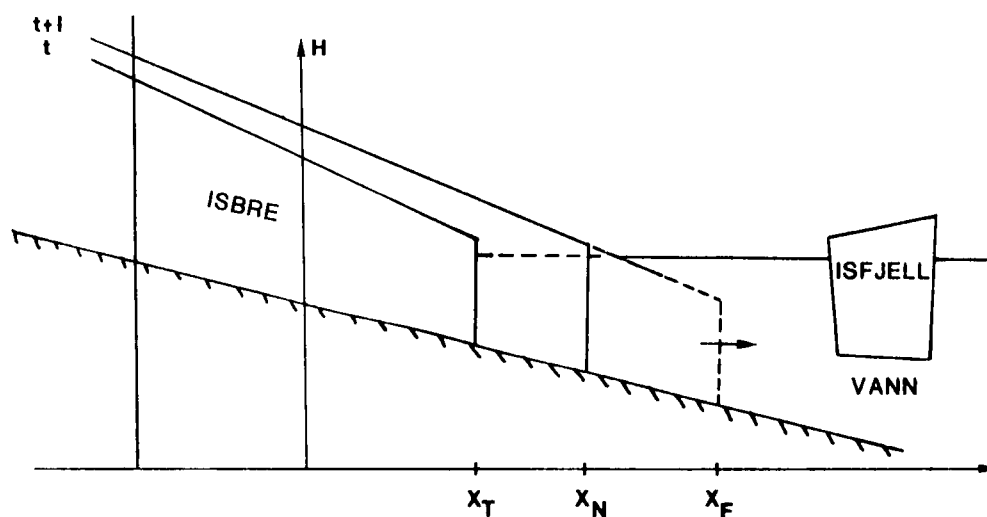


Fig. 9. Kalvingsfront når vanddyptet ikke er konstant. Den ytterste delen av breen vil brekke av som isfjell og flyte vekk.

Calving front where water depth is not constant. Outermost part of glacier will break off as icebergs and float away.

Isskille og bergschrund

For breens øvre område er isskille og bergschrund valgt som grensebetingelser. Fig. 10 viser hvordan dette kan se ut for et isskille.

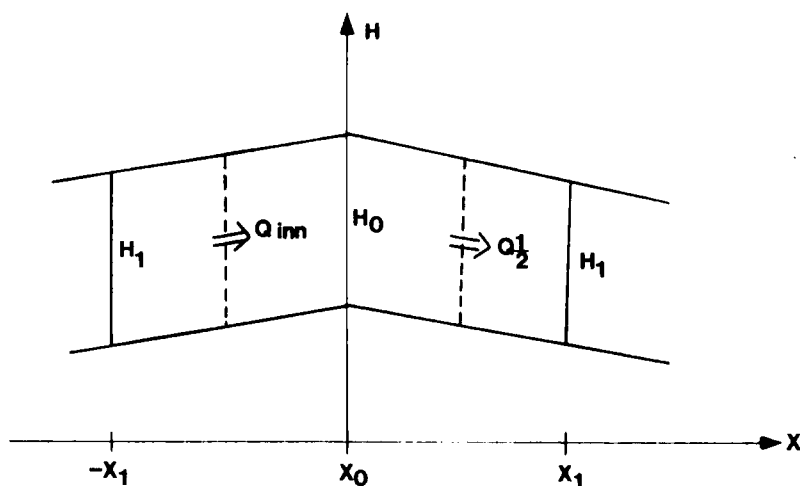


Fig. 10. Isskille/bergschrund. Figuren viser flux inn og ut av første element.

Ice divide/bergschrund. Figure shows flux in and out of first element.

Q_{inn} er fluxen inn i den første seksjonen. Den er definert på følgende måte:

$$Q_{inn} = \psi \cdot Q_{\frac{1}{2}} \quad 3.54$$

der ψ er en fluxparameter. Hvis vi har et symmetrisk isdele er $\psi=-1$. Hvis vi velger $\psi=1$ har vi en bergschrund. Residualligningen vil i dette tilfelle være

$$R_o = \frac{S_{o,t+1} - S_{o,t}}{\Delta t} + (1-\psi) \frac{Q_{\frac{1}{2},t+1} + Q_{\frac{1}{2},t}}{2(x_1 - x_o)} - b_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (W_{o,t+1} + W_{o,t}) \quad 3.55$$

der symbolene er som før nevnt.

Korreksjonskoeffisienten til matrisen (fig. 4) er forskjellig for dalbre og platåbre.

Dalbre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_o}{\partial H_{o,t+1}} &= \frac{1}{\Delta t} (A_o (H_{o,t+1})^{\frac{1}{2}} + B_o H_{o,t+1}) - \frac{1}{2} b_o (\frac{1}{2} A_o (H_{o,t+1})^{\frac{1}{2}} + B_o) \\ &+ \frac{(1-\psi) T5_o}{2(x_1 - x_o)} \left(\frac{1}{H_{o,t+1} + H_{i,t+1}} (T1_o (n + \frac{5}{2}) + T2_o (n+3)) + T6_o \right) \end{aligned} \quad 3.56$$

$$\frac{\partial R_o}{\partial H_{i,t+1}} = \frac{(1-\psi) T5_o}{2(x_1 - x_o)} \left(\frac{1}{H_{o,t+1} + H_{i,t+1}} (T1_o (n + \frac{5}{2}) + T2_o (n+3)) - T6_o \right) \quad 3.57$$

Platåbre:

$$\frac{\partial R_o}{\partial H_{o,t+1}} = \frac{W_o}{\Delta t} + \frac{(1-\psi) T5_o}{2(x_1 - x_o)} \left(\frac{1}{H_{o,t+1} + H_{i,t+1}} (W K_{\frac{1}{2}} (H_{\frac{1}{2},t+1})^{n+2} + T7_{\frac{1}{2}} (n+1)) + T8_{\frac{1}{2}} \right) \quad 3.58$$

$$\frac{\partial R_o}{\partial H_{i,t+1}} = \frac{(1-\psi) T5_o}{2(x_1 - x_o)} \left(\frac{1}{H_{o,t+1} + H_{i,t+1}} (W K_{\frac{1}{2}} (H_{\frac{1}{2},t+1})^{n+2} + T7_{\frac{1}{2}} (n+1)) - T8_{\frac{1}{2}} \right) \quad 3.59$$

T1-T8 er gitt foran.

4 PRAKTISK BRUK AV MODELLEN

4.1 Innledning

Modellen vil kunne bli brukt på dalbreer og platåbreer. I fronten bygger modellen på at breen kan ha en kileformet form eller at den

kalver (står i vann). I breens øvre område vil man kunne velge mellom isskille og bergschrund.

Modellen kan kjøres så mange år man vil framover i tiden. Dette er nyttig hvis man f.eks. vil finne responstid eller man vil undersøke hvordan likevektsprofilen ser ut for en gitt massebalanse. Variasjoner i klima kan legges inn etter behov i form av nettobalansekurver.

Modellen kan ikke kjøres bakover i tiden. For eventuelt å rekonstruere tidligere tiders breer, må man prediktere en startbre og sammenligne resultater etter en kjøring med kjente verdier for bredekningen (morener o.l.).

Det er viktig at inngangsdataene for breens geometri er så riktige som mulig. Data om tykkelsen til breen er sentral, og breradar-målinger vil her være av vital betydning for modellens forutsigelse av brefrontvariasjoner. Der disse ikke er tilgjengelig kan modellen kjøres med forskjellige starttykkelser (dvs. bunnprofiler) og resultatene sammenlignes med målte verdier av f.eks. hastigheter og frontvariasjoner.

Glidningskoeffisient, fluxfaktor og friksjonsfaktor kan også forandres på forskjellige steder i lengdeprofilen for å gi best mulige resultater.

4.2 Lage en fil for inngangsdata til modellen (innfil)

Etter at man har logget seg inn på systemet kaller man opp bremodellen ved å skrive -, BREMOD. Systemet reagerer med en meny. Velg nr 1 i denne menyen. Når man først har valgt dette alternativet, må hele innfilen testes inn før man kommer tilbake til hovedmenyen igjen. Nedenfor blir det gitt kommentarer til noen av spørsmålene som systemet spør om. Andre nødvendige kommentarer blir gitt i programmet.

- Angi hvilket år du henter data fra

Du angir her hvilket år inngangsdata for breens geometri er hentet fra, f.eks. bunntopografi, overflatetopografi, tverrprofiler osv.

- Hvor mange beregningspunkter skal defineres i lengdeprofilen?

På et kart over breen legges det et lengdeprofil langs breens dypeste parti ("dypålen"). På platåbreer kan dette være vanskelig fordi man kan ha flere isstrømmer ned mot dalbreen.

Man må da på grunnlag av et eventuelt bunnkart og overflatekartet etter skjønn velge hovedprofil. Dette profilet deles opp i seksjoner og antall punkter i denne oppdelingen skal inn som data (se fig. 11).

Det første punktet er øverst på breen. Et punkt må ligge på selve brefronten. Pga. eventuelle breframstøt må noen punkter også ligge utenfor breen.

Avstanden mellom hvert punkt er konstant. Eksempelvis kan man velge

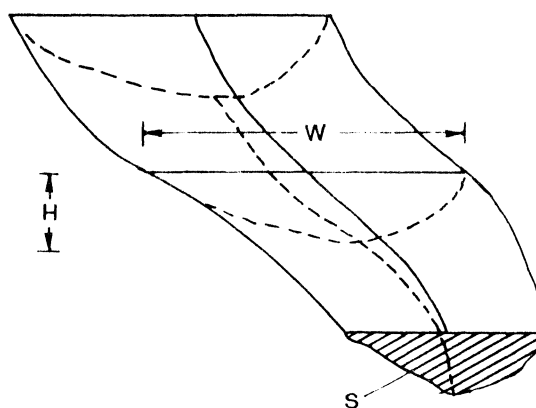


Fig. 11. Breens lengdeprofil deles opp i seksjoner. For hvert tverrsnitt angis bredde (W), tverrsnittsareal (S) og maksimal tykkelse (H).

Glacier's length profile divided into sections. Width (W), area (S) and maximum thickness (H) are specified for every cross-section.

en avstand på 100 m for små breer (2-3 km). Det maksimale antall som foreløpig er tillatt (kan forandres i programmet) er 99 punkter.

- Ligger det et vann foran breen som den står i eller kan rykke ut i?

Her skal høyden over havet til dette vannet brukes. Hvis vannet er regulert skal HRV og LRV benyttes.

- Grensebetingelser for breens øvre avgrensing

Både dalbreer og platåbreer kan ha isskille. Det mest vanlige for dalbreer er imidlertid bergschrund. Du kan velge mellom bergschrund og isskille i modellen.

- Overflateprofil og berggrunnsprofil

Det er viktig at overflatehelling og tykkelse på et gitt sted "står i forhold til hverandre", slik at fysiske umuligheter ikke kan oppstå i beregningene. Dette kan skje fordi bretykkelsesmålingene er beheftet med endel usikkerhet. For å unngå disse fysiske vanskelighetene bør man tegne et overflate- og dybdeprofil på samme figur, med målte dybder inntegnet og kurver trukket etter skjønn. Data fra denne figuren tastes så inn til modellen.

Etter at "de beste" tall for overflate- og dybdeprofil er tastet inn vil modellen undersøke om dette strider mot fysiske og glasiologiske prinsipper. Den vil deretter legge inn det best mulige dybdeprofil på grunnlag av inntastede data fra tverrsnittsarealer og dybder. Dette justerte dybdeprofil bør sjekkes med det inntastede. Eventuelle rettinger i dette nye dybdeprofilet kan foretas med retteprogrammet (kap. 4.2).

- Geometriske parametere. Tverrsnittsareal og bredde

Fordi beregningsmetodikken er forskjellig for en dalbre og for en platåbre, må avstanden fra isskille til dalbreen tastes inn til

modellen. Hvis breen er en platåbre, vil følgende komme opp på skjermen:

Angi avstanden fra isskille til overgangen platå/dalbre langs lengdeprofilet: _ ? Tast inn avstanden i meter.

Tverrsnittsarealene danner grunnlaget for massefluxberegningene. I hvert punkt tegnes det et tverrsnitt av breen. Dette tverrsnittet skal stå vinkelrett på massefluxen, dvs. ligge langs en høydekurve. Tverrsnittet deles i sektorer og bretykkelsen for hver linje tastes inn (se fig. 12).

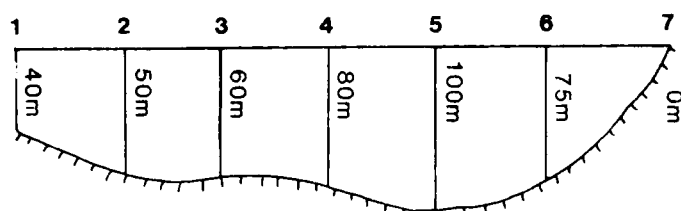


Fig. 12. Hvert tverrsnitt deles i sektorer. Dybden for grenselinjene, inkludert endepunktene, skal angis som inndata til modellen.

Every cross-section is divided into sectors. Depth of boundaries, including end points, is input data to model.

Legg merke til at dybden i endepunktene er inkludert. På grunnlag av disse tallene blir tverrsnittet beregnet.

Metoden benyttes for platåbreens øvre del, men kan også brukes for dalbreer når tverrsnittet er kjent.

På en dalbre kan man imidlertid også benytte en alternativ metode for å regne ut tverrsnittsareal. Den bygger på at arealet og bredden er en funksjon av maksimaltykkelsen (se kap 2.2). Ved å anta et maksimaldyp beregnes parametere som beskriver tverrsnittets form ved hjelp av bredden av breen, og bredden av dalen 50 m over breen. Utenfor breen finnes parametrene for dalens form, ved at man taster inn bredden av dalen 50 m over dalbunnen, og bredden av dalen 100 m over dalbunnen.

- Glidningskoeffisienten

Glidningskoeffisienten er definert som forholdet mellom glidningshastighet og total overflatehastighet. Ingen glidning betyr at glidningstallet er null. 50% glidning betyr at glidningstallet er 0.5. Man kan velge om man vil ha 1) konstant tall for alle punktene, 2) ulike verdier i alle punktene eller 3) konstant tall i angitte seksjoner (f.eks. 0.25 fra beregningspunkt nr 1 til nr 20, osv.).

- Nettobalanseinnlesing

Fordi nettobalansen er knyttet til tiden, må man oppgi hvor mange år man angir nettobalanse for. Man kan gjerne vente med å legge inn nettobalanse, f.eks. hvis man vil kjøre modellen i flere år enn man

har målte nettobalansekurver til. Nettobalansekurven må da bli lagt inn under kjøringen av modellen (kap 4.3).

Hvis man velger å legge inn nettobalansen og antall ønskede år i innfilen, benyttes kjente nettobalansekurver der nettobalansen er en funksjon av høyden over havet. Man kan velge om man vil legge inn tall for nettobalansen i hvert beregningspunkt i lengdeprofilet, eller ved hjelp av tre valgte punkter på nettobalansekurven. Som regel er det nok å velge siste alternativ. På kurvene finner man nettobalansen i øvre og nedre punkt på breen, samt høyden over havet for et eventuelt knekkpunkt i nettobalansekurven. Inndata til modellen er altså:

- 1) Nettobalansen for øverste punkt på breen (punkt 1)
- 2) Høyden over havet for eventuelt knekkpunkt og nettobalansen i dette punktet
- 3) Nettobalansen for nederste punkt på breen (fronten)

På grunnlag av disse data blir en nettobalansekurve konstruert.

4.3 Rette en ferdiglaget innfil

Skriv -, BREMOD og velg alternativ 2 i menyen: Det vil da komme opp et spørsmål om navnet på filen du skal rette og deretter en ny meny over rettemuligheter:

0. Startår
1. Det totale antall punkter og berggrunnsprofilet
2. Innsjø/ikke innsjø, og breens øvre avgrensing
3. Breens overflateprofil
4. Glidningskoeffisient
5. Tverrsnittsareal og bredde
6. Friksjonsfaktor f
7. Fluxfaktor f^*
8. Nettobalansen og tiden

Alle menyvalgene er selvinstruerende. Jeg vil bare kommentere 6 og 7.

I innfilprogrammet ble verdiene for disse faktorene (f og f^*) beregnet på grunnlag av ferdige tabeller (se kap 2). Hvis man har behov for å forandre på disse, er dette mulig ved hjelp av punkt 6 eller 7.

4.4 Kjøre bremodellen

Skriv: -, BREMOD og velg alternativ 3.

Man får deretter spørsmål om navnet på innfilen man vil benytte og navnet på den filen som resultatene fra kjøringen skal ligge på. Under kjøringen har man mange muligheter for å variere forskjellige parametere. Jeg vil her konsentrere meg om variasjonsmuligheter i nettobalansen og muligheter for å variere vannstanden på et eventuelt vann som breen kalver i.

- Variasjonsmuligheter i nettobalansen

Hvis ikke nettobalansen er gitt i innfilprogrammet må dette angis under kjøringen. Her ligger det muligheter for å undersøke breenes ulike reaksjoner på klimavariasjoner. Følgende alternativ er til valg:

1. Konstant nettobalanse i alle årene man vil kjøre
2. Avvik fra den valgte nettobalanse i et fritt valgt antall år.
3. Svingninger omkring en konstant gitt nettobalanse.

I hvert av tilfellene legges det inn en nettobalansekurve på samme måte som under punktet om nettobalanser i innfilprogrammet (kap 4.1).

I punkt 2 ovenfor kan man f.eks velge et avvik på +2 m vannekv. over hele breen i 3 år fra et bestemt år, for deretter å gå tilbake til den opprinnelige nettobalansen i de resterende årene man vil kjøre. Breens reaksjon kan så studeres.

I punkt 3 har man muligheter for å la nettobalansen svinge rundt en fast verdi. F.eks kan avviket være +3 m i 4 år for deretter å bli -3 m i de neste 4 år osv. Brefrontvariasjonene kan så sammenlignes med nettobalansesvingningene.

-Variasjonsmuligheter i vannstandsreguleringen

Hvis man i innfilprogrammet (kap 4.1) har angitt et vann med varierende vannstand, skal reguleringsbestemmelsene for vannet gis. Som inndata til modellen angis nedtappingens begynnelse (mnd.nr), nedtappingens slutt og oppfyllingens slutt.

Hvis man vil forandre LRV og HRV, gjøres dette i retteprogrammet. På denne måten kan man få et bilde av hvordan tappereguleringen i magasinet vil innvirke på breen.

4.5 Lage utskrifter og plottinger fra resultatfiler

Skriv -, BREMOD og velg alternativ 4. Etter at navn på filen er tastet inn, kan du velge følgende:

1. Bla gjennom filen på skjermen (FSE) 2. Utskrift av hele filen på papir 3. Diverse plottinger på skjerm/papir 4. Skifte resultatfil

For å kunne bla gjennom filen, er det nødvendig å kjenne til skjermhåndteringspakken FSE fra Control Data; ellers er alle alternativene selvinstruerende. (NB! Punkt 3: Vikingskjermen har nr. 21; - ikke nr. 120).

4.6 Lage en ny innfil fra en resultatfil

Skriv -, BREMOD og velg alternativ 5 i menyen.

Dette alternativet er nyttig hvis man f.eks har kjørt modellen et

visst antall år og laget en resultatfil for denne kjøringen. Senere er man interessert i å kjøre modellen videre med forskjellige alternativer for enkelte variable (nettobalanse, glidningsparametere o.l.). Man lager da en ny innfil med resultatfilen som utgangspunkt. Det er her viktig å være klar over følgende to faktorer:

1. Det blir ikke lagt inn noen nettobalanse i den nydannede innfilen. Den må man eventuelt legge inn ved hjelp av retteprogrammet eller under kjøringen av modellen. Vil man ha samme nettobalanse som i resultatfilen man henter data fra, skal man gå inn i denne filen å hente tall for nettobalansen.
2. Hvis man i kjøringen for resultatfilen hadde reguleringsbestemmelser med HRV og LRV på et vann foran breen, vil ikke HRV og LRV bli overført til den nye datafilen. Vil man fremdeles ha varierende vannstand på vannet foran, kan dette legges inn ved hjelp av retteprogrammet.

4.7 Sammenkobling av to resultatfiler fra samme bre

Skriv -, BREMOD og velg alternativ 6 i menyen.

Hvis det er kjørt to forskjellige kjøringer for samme bre, kan disse kobles sammen til en resultatfil. Forutsetningen for dette er at årene følger etter hverandre i begge filene. Hvis f.eks den første filen slutter med 1966, må den andre begynne på 1966.

5. OPPBYGGING AV DATASYSTEMET

5.1 Struktur

Datasystemet består av 6 FORTRAN-programmer som er bundet sammen av CCL-rutiner. Hovedmenyen er på CCL-nivå og systemet kaller opp denne menyen etter hvert FORTRAN-program som er kjørt. Hvert FORTRAN-program har sin egen binærversjon (se fig. 13). Blokkstruktur for program bre (modellprogrammet) er gitt i fig. 14.

5.2 Rettinger

Kommentarer om subrutiner og viktige variabelnavn står først i hvert program. Etter at man har rettet i et program, må den respektive binærversjonen slettes. Den blir automatisk laget igjen når man kjører det nye programmet.

Alle arrayene i systemet har en konstant lengde, som bestemmer hvor mange punkter man kan ha i lengdeprofilet. Denne størrelsen er satt til 99, men kan forandres. Forandringen gjøres i hvert program ved å forandre på en parameter først i hvert program. (PARAMETER (M= 99)).

Hvis det oppstår feil under kjøring av programmene, vil feilmeldinger bli lagt ut på filen PMDUMP og en utskrift av programmet med nummererte linjer og alle variable som er brukt blir lagt inn på filen T.

En kopi av bremodellen ligger på filen MODELL. Hvis denne filen skal kjøres som bremodell må filen omdøpes til BREMOD med RENAME i NOS.

6. PLOTTE-EKSEMPLER FRA RESULTATFILEN

Figurene nedenfor er hentet fra en enkel modellkjøring for Austdalsbreen og Engabreen. Avstanden mellom punktene i denne kjøringen er ca 500 m og antagelig noe for langt for modellens nøyaktighet. Hensikten med figurene er å vise de forskjellige plotttemuligheter man har til rådighet for hver modellkjøring.

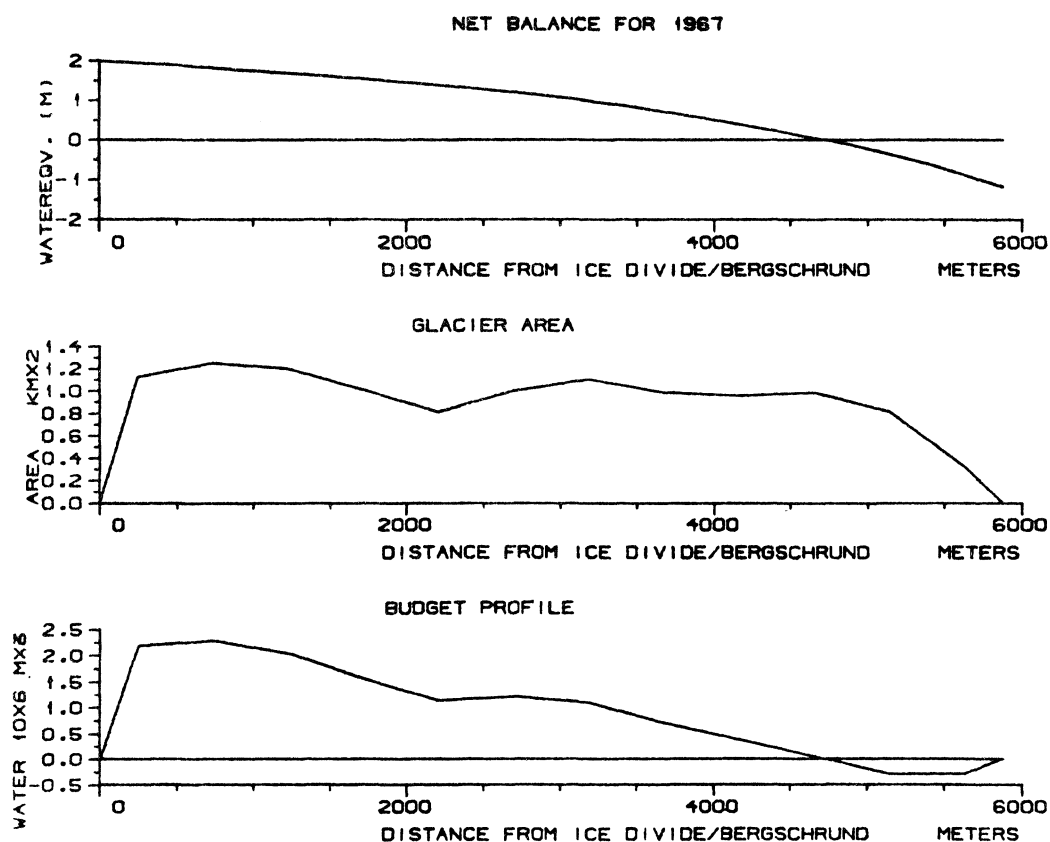


Fig. 15. Nettobalanseprofil, arealfordeling og budsjettprofil for et utvalgt år. Budsjettprofilen er lik nettobalansen multiplisert med brearealet i hvert element.

Net balance profile, area distribution and budget profile for specified year. Budget profile is net balance multiplied by area in each element.

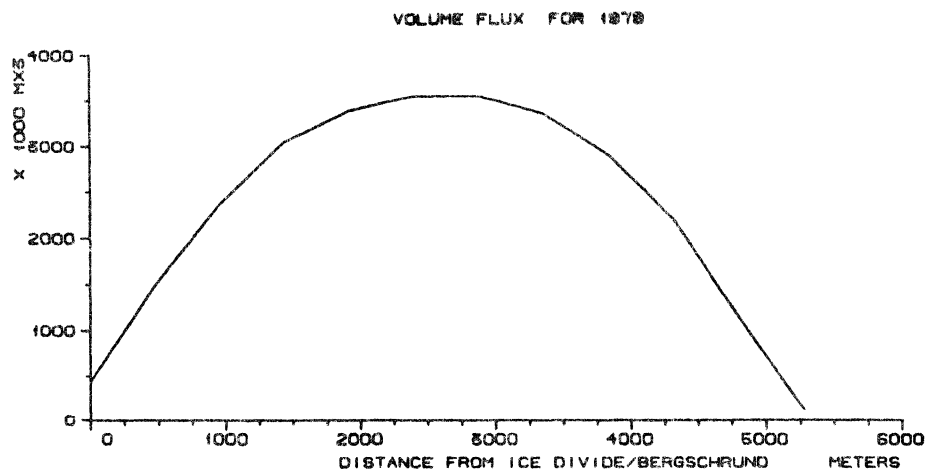


Fig. 16. Volumfluxfordeling for et utvalgt år. Volumfluxen er størst omkring firnlinja.

Volume flux distribution for specified year. Volume flux is greatest near the firn line.

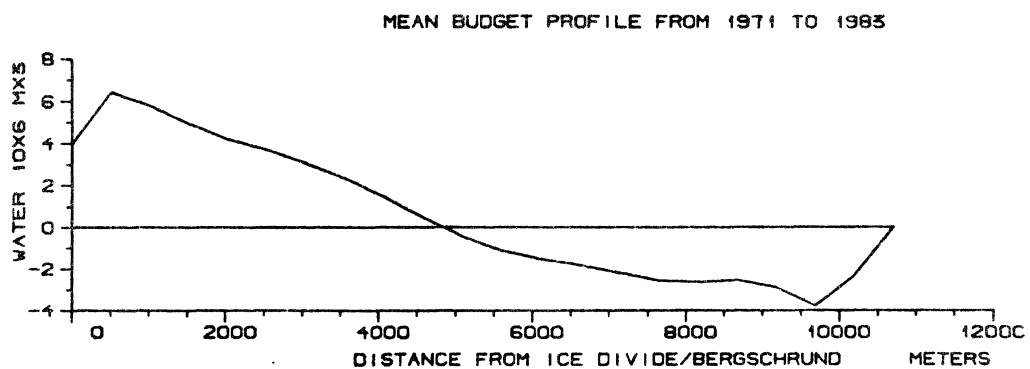
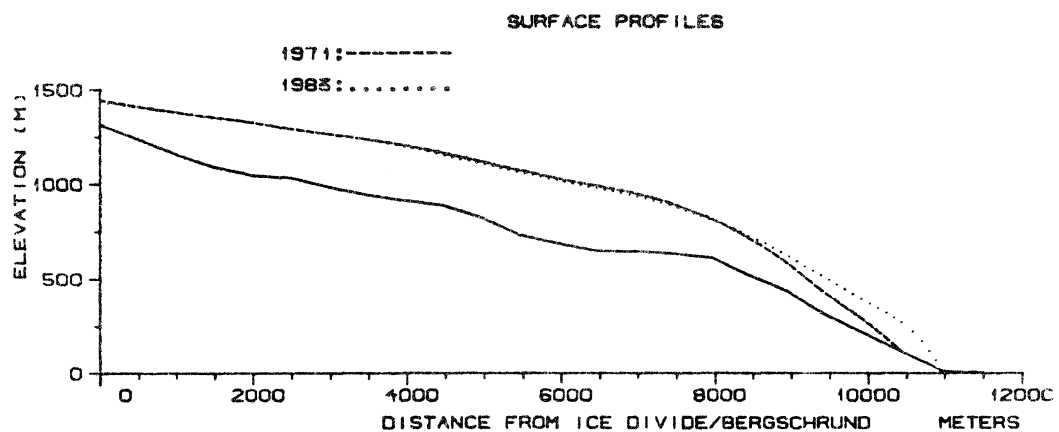


Fig. 17. Overflateprofiler for to utvalgte år og det gjennomsnittlige budsjettprofilen i disse årene.

Surface profiles for two specified years and mean budget profile in these years.

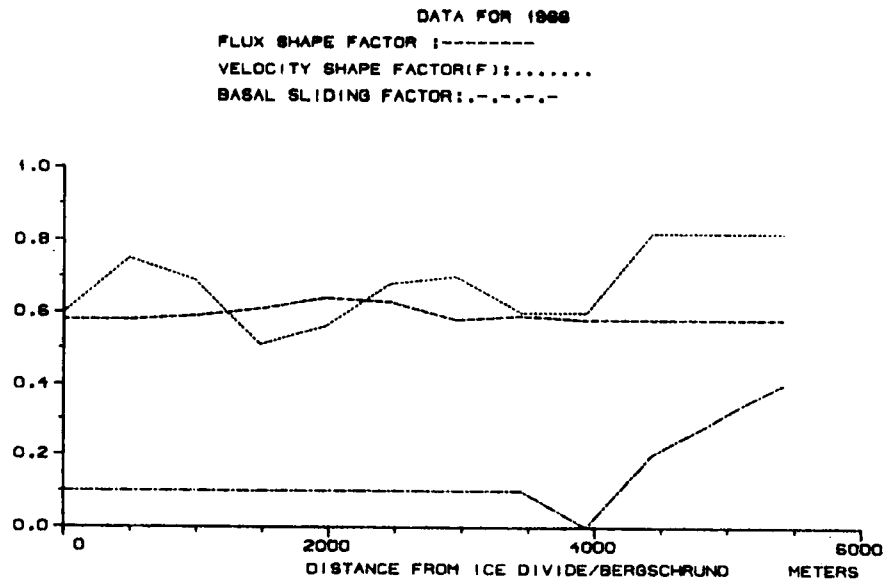


Fig. 18. Fordelingen av fluxfaktor, friksjonsfaktor (F) og glidningskoeffisient i et lengdeprofil. Sammen med tverrsnittsgeometrien gir disse oss en mulighet for å gi den en-dimensjonale modellen en tre-dimensjonal karakter.

Flux factor, friction factor and sliding coefficient along length profile. Together with cross-sectional geometry, these give the one-dimensional model a three-dimensional character.

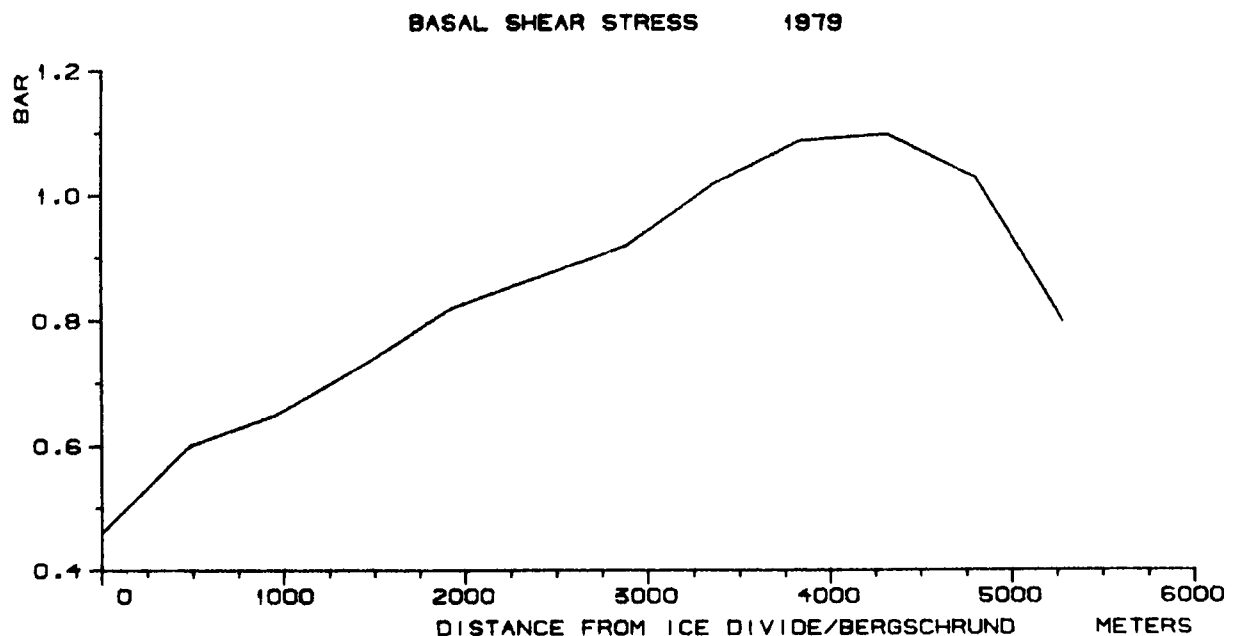


Fig. 19. Fordeling av det basale skjærstrekket. For de fleste breer ligger skjærstrekket mellom 0,5 bar og 1,5 bar, avhengig av bretykkelsen og overflatehellingen.

Distribution of basal shear-stress. For most glaciers the shear-stress is between 0.5 and 1.5 bar, dependent on ice thickness and surface slope.

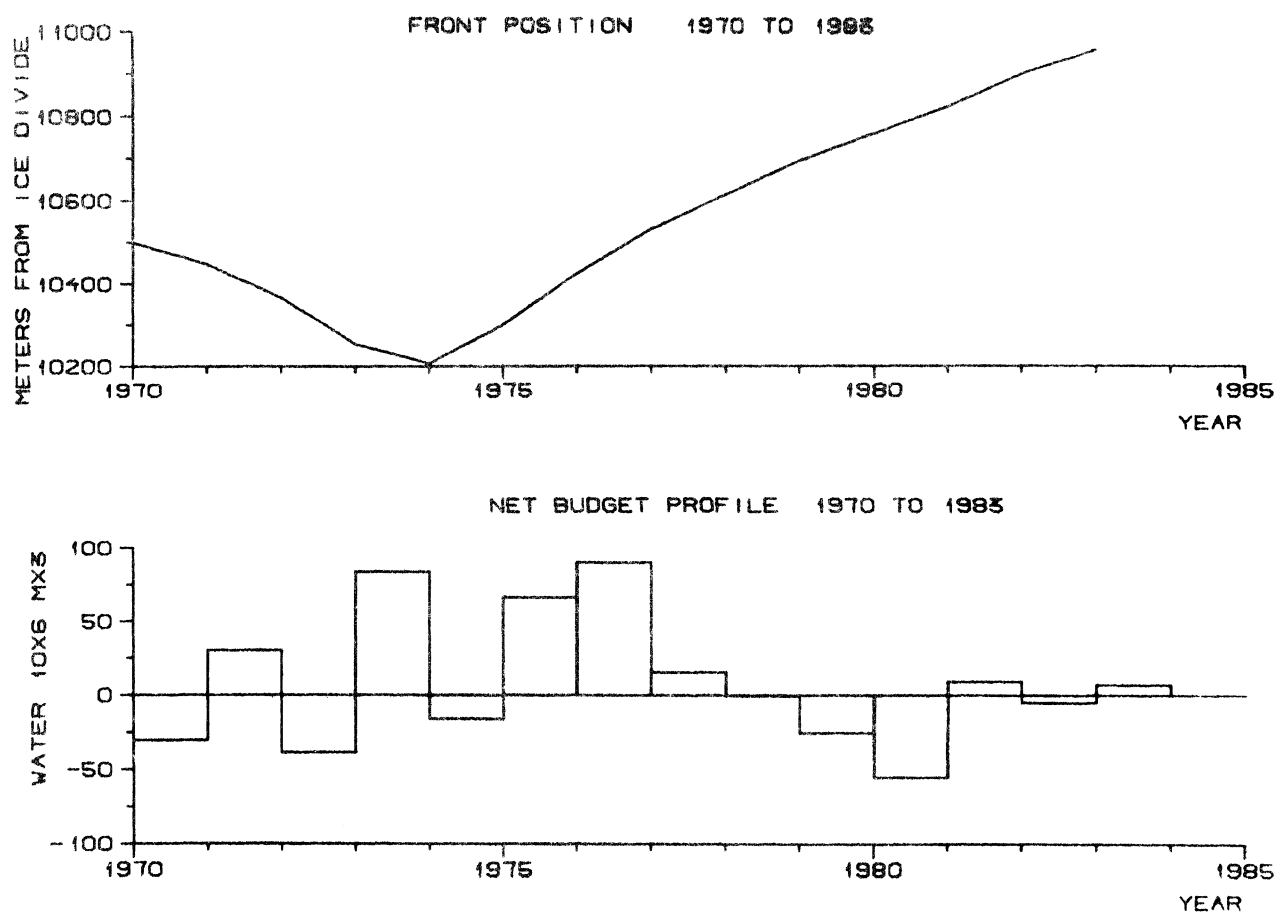


Fig. 20. Breffrontposisjonen (øverst) og nettobudsjettet for hele breen i hvert år fra 1970 til 83. Breen er her i fremgang selv om nettobalansene er negative eller nær null (1978-1984).

Front position (top) and net balance of whole glacier for each year 1970 to 1983. The glacier advances despite negative or near-zero net balance.

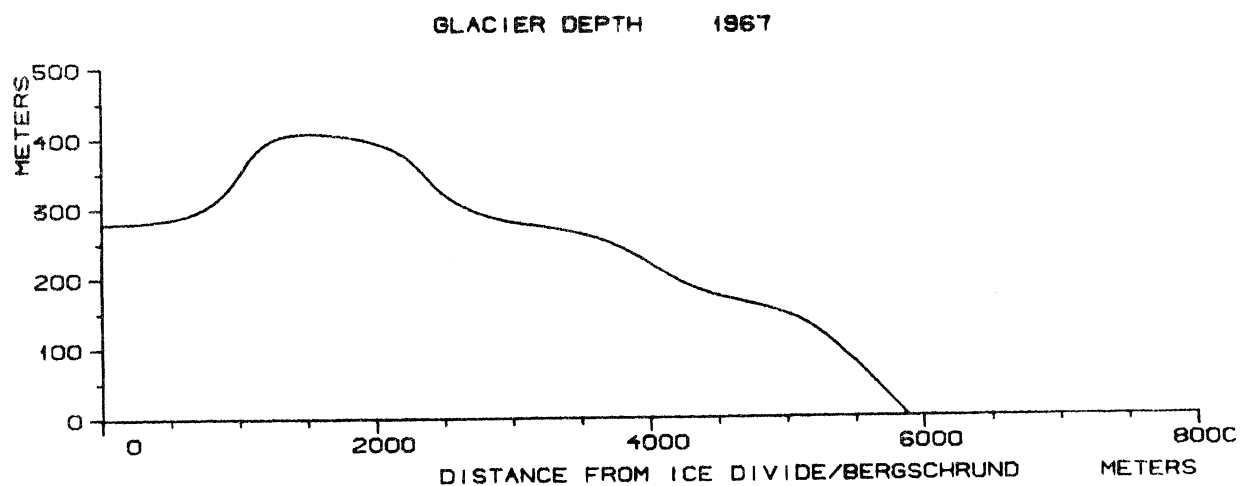


Fig. 21. Beregnet bretykkelse for 1967.

Calculated ice thickness for 1967.

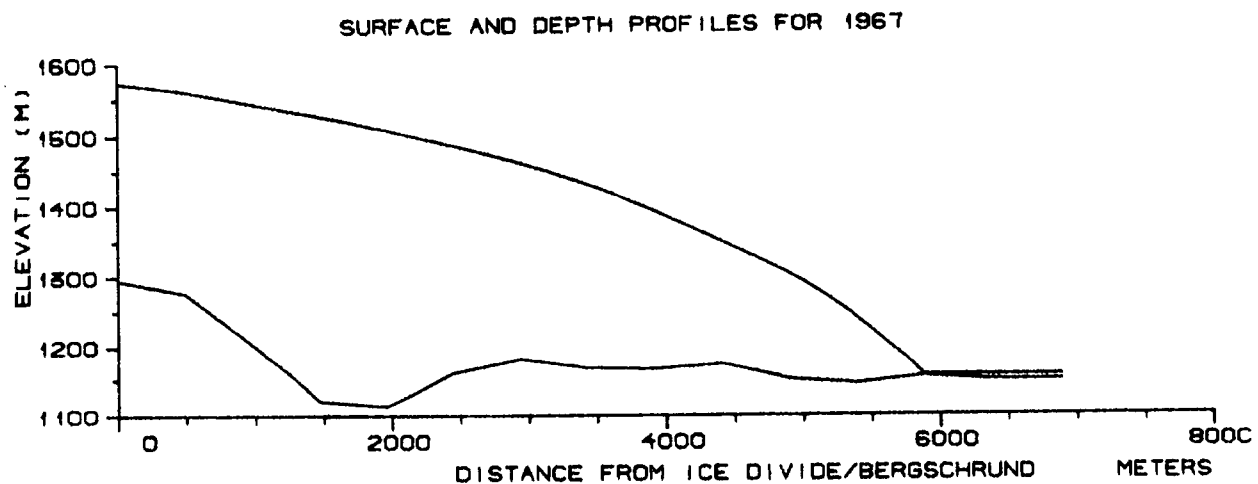


Fig. 22. Overflate og bunnprofil for 1967.

Surface and bed profile for 1967.

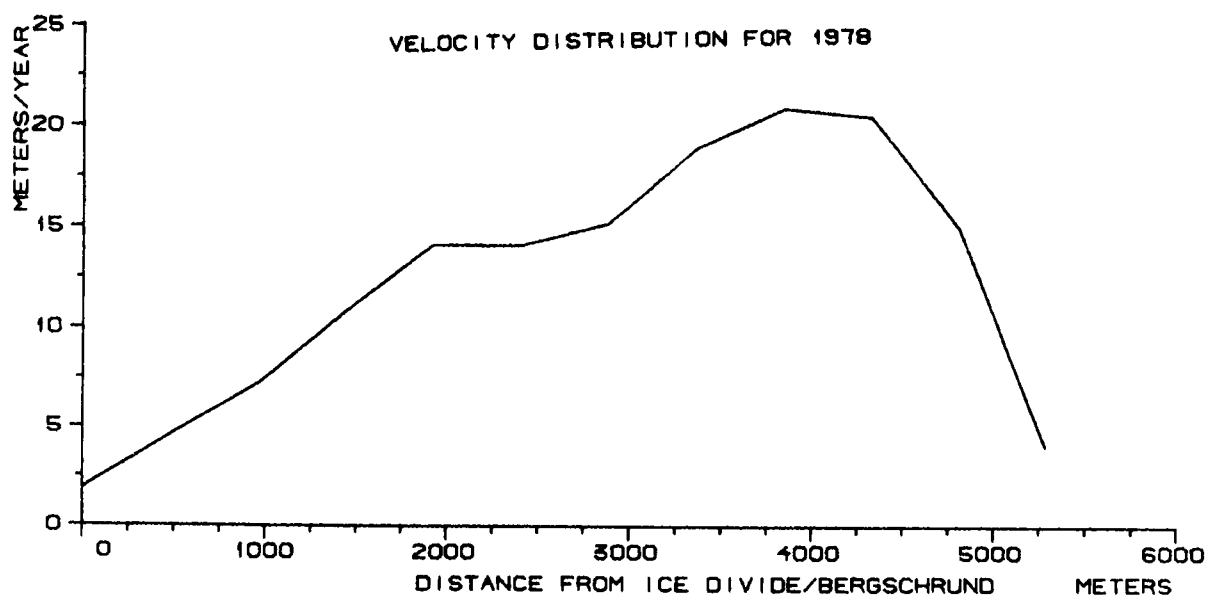


Fig. 23. Hastighetsfordeling for 1978.

Velocity distribution for 1978.

7. ETYEROND

På grunnlag av de modellkjøringene som er foretatt med den foreliggende modell, vil jeg gi noen kommentarer angående forbedringer og forandringer av systemet.

Det største problemet med en-dimensjonale modeller brukt på platåbreer er akkumulasjonsområdets kompleksitet. Man kan ikke, som for en dalbre, ha klart avgrenset brestrøm. I stedet har man diffuse avgrensinger og flere brestrømmer som drenerer ned mot dalbreen.

Modellen som her er utviklet forenkler det øvre platå til å bestå av en brestrøm fra øverst til nederst. For breer av kompleks form, f.eks. Nigardsbreen og Engabreen, vil nødvendigvis dette medføre usikkerhet i beregningene. Da modellen beregner massefluxforandringer, kan imidlertid resultatene bli relativt gode selv om elementenes form ikke er helt riktige.

En annen viktig faktor er kjennskap til tykkelsen av dalbreen. Fordi breen her i de fleste tilfeller er mye tynnere enn på platåbreen, vil man få en "tubeeffekt" som kan slå mye ut i frontvariasjonene hvis tykkelsen er gal.

For å bryte på problemet med ulike brestrømmer i akkumulasjonsområdet, kunne man som en forbedring av modellen, dele opp området i flere instrømmer. Dette vil imidlertid medføre at Bindschadlers numeriske metode måtte modifiseres endel. På den annen side ser det ut til at hans metode gir for mye glatting av overflaten. Fordelen med Bindschadlers metode er at den er stabil, men med riktig valg av tidssteg og gridavstand vil også andre numeriske metoder være brukbare.

8. ENGLISH SUMMARY

This model is a development of Bindschadler's model for Variegated Glacier (Bindschadler 1978), such that it can be used both on valley glaciers and ice-caps.

The model is one-dimensional, with independent variable H as the maximum thickness in a transverse profile. The other variables are functions of H such that the one-dimensional model is a best fit to the actual three-dimensional geometry. The equations can be divided in two groups: 1) those which describe the dynamics of the glacier; and 2) those which describe the geometry of the glacier.

The dynamic equations are given in Ch. 2, eq. 2.1 - 2.10, where S is cross-section area and Q is volume-flux through S with width W . Net balance over the cross-section is b . τ is basal shear stress, ρ is the density of ice, g is the acceleration due to gravity and H is thickness perpendicular to the ice surface. α is the surface slope. u_s , u_b and u_d are respectively the velocity at the surface, at the bed, and that due to deformation. The constants a and n are from Glen's flow law. f^* and f are shape factors. Nye (1965) has calculated f^* for

different valley shapes. His values are used in the model. He has also calculated f for different shapes and his values are used in the valley-type portion of the glacier. In the plateau-portion a different approach has been adopted. Radio-echo depth-soundings have made it possible to find cross-sections of the glacier and estimates of f are calculated from eq. 2.4 where P is the length of the ice-rock interface across the section (Nye 1952).

For describing the variation of S with H , Bindshadler has proposed eq. 2.4 and 2.12. A and B are constants which give us the form of the cross-section. Eq. 2.11 is a linear combination of a V-valley and a parabolic valley. The cross-section area (S), is the integral of eq. 2.11 with respect to H .

In the upper plateau we cannot find a similar expression. For a given variation in H we will not have variations in width W . At a given place, therefore, we have eq. 2.13 (Fig. 1 and Fig. 2). The cross-section area will vary. Radio-echo soundings helps us to find a cross-section area (S_k) for a given year (the sounding year) and we can write eq. 2.14. H_k and W_k are respectively the maximum depth and width for the sounding year. H is the maximum depth in another year.

Equations 2.11 - 2.14 give the model a three-dimensional character.

A numerical finite-difference method is used. The method is implicit and a Crank Nicholson scheme is adopted. It uses centered differences for the spatial gradients and forward differences for the temporal gradients. The method is described in detail by Bindshadler (1978). The equations in finite-difference form are given here in section 3.2.

The solution of these equations requires two boundary conditions, at the upstream and downstream ends of the glacier. At the upstream boundary one of the following conditions is chosen: 1) a bergschrund or 2) an ice divide. At the glacier front: 1) a wedge type or 2) a calving type is chosen. Bindshadler has described the bergschrund, ice divide and wedge front.

When part of a glacier rests on water, it is exposed to additional melting at that point, represented by an out-flux Q_k . Brown and others (1982) have used a simple linear equation (eq. 3.47 in this paper) to calculate this flux. h_w is water-depth, S_T is cross-section area at the front and c_1 is a constant. Brown found this constant to be approximately 16 year⁻¹ for glaciers in Alaska and USA. These glaciers are influenced by tidal water. In Norway and Switzerland it is estimated that $c \approx 2$ year⁻¹.

It is possible to run the model for as many years as desired. This is important if one is interested in the glacier's response time and surface profile for a given mass balance. Climatic conditions can be specified in the form of the mass balance vs. altitude curves. The model cannot be run backwards in time.

Input data concerning the geometry of a glacier should be as precise as possible, thus it is important to have detailed radio-echo sounding depth measurements. Alternatively ice thickness, where not known, and other parameters such as basal sliding coefficient, can be adjusted to obtain a match between model predictions and observations.

The program is menu-driven and the structure is shown in Fig. 24.

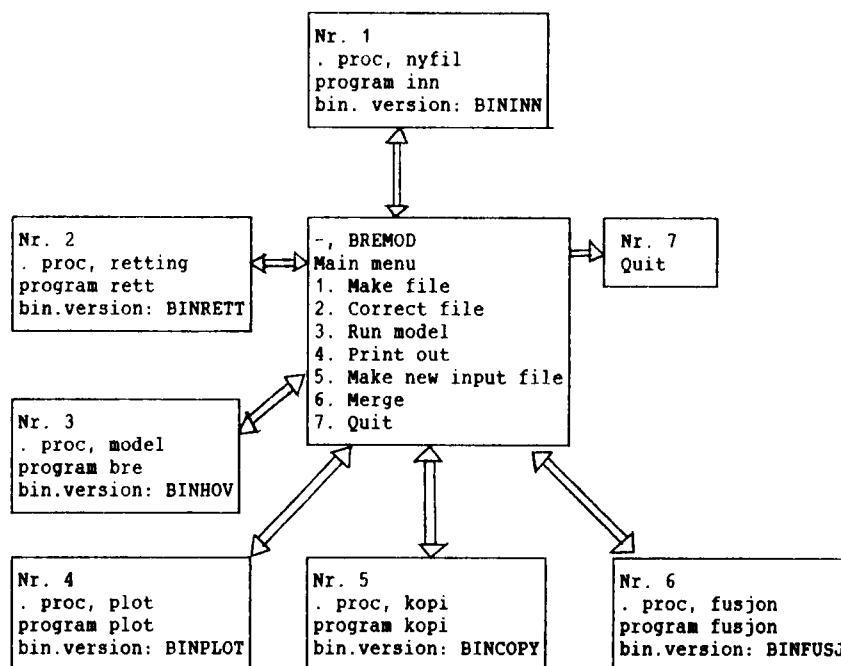


Fig. 24. Structure of program system

9. REFERANSER

Bindschadler, R.A.,

1978: A time-dependent model of temperate glacier flow and its application to predict changes in the surge-type Variegated Glacier during its quiescent phase: Unpublished thesis, University of Washington Geophysics Program, Seattle, Washington, 244 p.

1982: A numerical model of temperate glacier flow applied to the quiescent phase of a surge-type glacier: Journal of Glaciology, v.28, no.99, p. 239-265.

Bindschadler, R.A. and Rasmussen, L.A.,

1983: Finite-Difference model predictions of the drastic retreat of Columbia Glacier, Alaska. Geological Survey Professional Paper 1258-D.

Brown, C.S., Meier, M.F., and Post, Austin,

1982: The calving relation of Alaskan tidewater glaciers, with application to Columbia Glacier: U.S. Geological Survey Professional Paper 1258-C, 13 p.

- Glen, J.,
 1966: The Creep of Polycrystalline Ice. Proceedings of the Royal Society. Series A. Vol. 288. No.1175. p. 519-538.
- Hooke, & al.,
 1979: Calculations of velocity and temperature in a polar glacier using the finite-element method. Journal of Glaciology. Vol.24, no.90.
- Hutter, K.,
 1983: Theoretical Glaciology. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht/Boston/Lancaster.
- McCracken, D.D. and Dorn, W.S.,
 1964: Numerical Methods and Fortran Programming. John Wiley and Sons Inc, New York, 455 p.
- Nye, J.F.,
 1952: The Mechanics of Glacier Flow, Journal of Glaciology. Vol.2, no.12, p.82-93.
 1960: The Response of Glaciers and Ice Sheets to Seasonal Changes. Proceedings of the Royal Society. Series A. Vol.219, p.447-489.
 1963a: The Response of a Glacier to changes in the Rate of Nourishment and Wastage. Proceedings of the Royal Society. Series A. Vol.275, p.87-112.
 1963b: On the Theory of Advance and Retreat of Glaciers. Geophysical Journal. Vol.7, p. 431-456.
 1965: The Flow of a Glacier in a Channel in Rectangular, Elliptic, and Parabolic Cross Section. Journal of Glaciology. Vol.5, no.41, p.661-690.
- Paterson, W.S.B.,
 1969: The Physics of Glaciers. Pergammon Press, New York.
- Rasmussen, L.A., and Meier, M.F.,
 1982: Continuity equation model of the drastic retreat of Columbia Glacier, Alaska:U.S. Geological Survey Professional Paper 1258-A, 23 p.
- Sikonia, W.G.,
 1982: Finite element model of drastic retreat of Columbia Glacier, Alaska:U.S. Geological Survey Professional Paper 1258-B, 74 p.

Denne serien utgis av Vassdragsdirektoratet ved Norges Vassdrags- og Energiverk.

Adresse: Postboks 5091 Majorstua 0301 Oslo 3.

I V-PULIKASJONSSERIE ER UTGITT:

- Nr. 1. D. Lundquist, L.-E. Petterson, E. Skofteland, N.R. Sælthun:
Beregning av dimensjonerende og påregnelig maksimal flom.
Retningslinjer. (32 s.) 1986
- " 2. J.A. Eie, O. Fossheim, Å. Hjelm-Hansen: "Nytt rundskriv 36".
Vassdragsreguleringsloven - krav til søknader. (39 s.) 1986
- " 3. T. Jensen: Hydroelectric Power in Lesotho. (35 s.) 1987
- " 4. B. Aspen, T. Jensen, H. Stensby: Nyttbar vannkraft pr.
01.01.87. Vannkrafttilgang fram til år 2000. (75 s.) 1987
- " 5. Bård Andersen: Biological and technical efforts to protect
against nature damages and to improve conditions of living in
Norway. (6 s.) 1987
- " 6. Per Einar Faugli (red): FoU i Jostedøla - seminarrapport
(249 s.) 1987.
- " 7. Ola Kjeldsen (red.): Glasiologiske undersøkelser i Norge 1984
(70 s.) 1987

